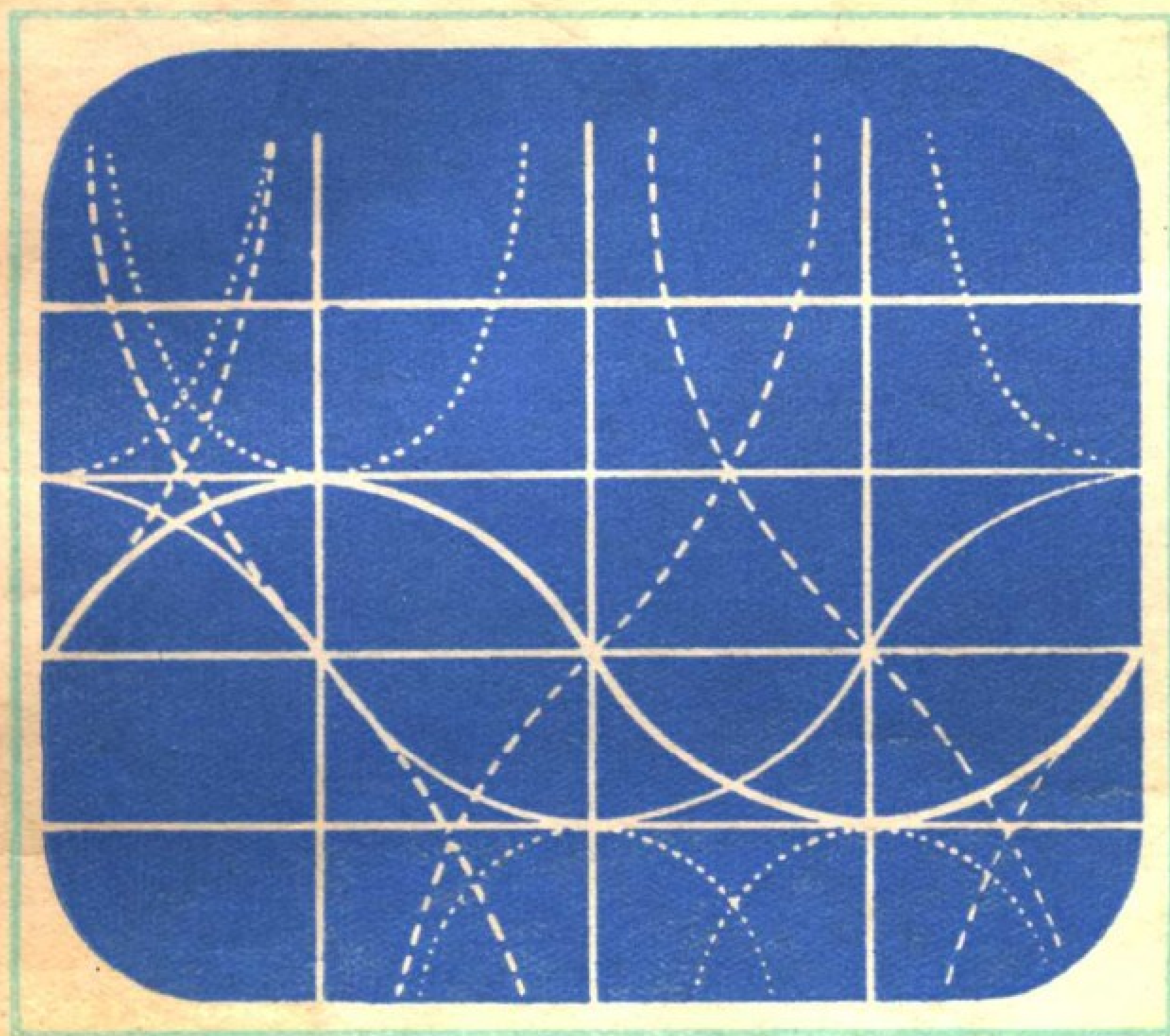
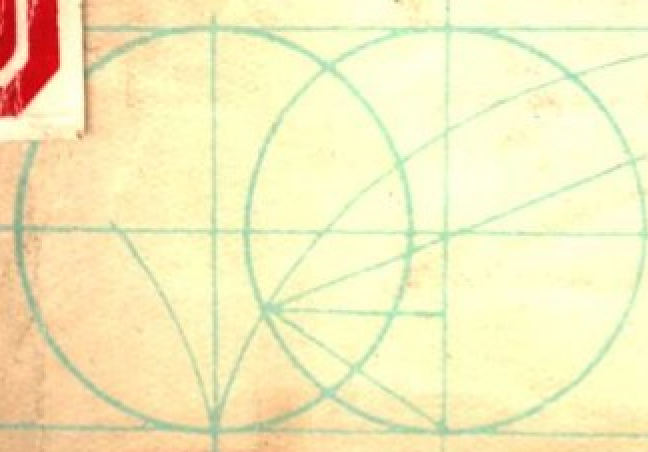




严镇军

从正五边形谈起

上海教育出版社



VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

从正五边形谈起

严 镇 军



上海教育出版社

从正五边形谈起

严　镇　军

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海日历印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2.5　字数 53,000
1980 年 3 月第 1 版　1980 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—95,000 本

统一书号：7150·2171　定价：0.19 元

前　言

1978年4月，全国部分省市中学生数学竞赛前夕，作者曾把这本小书中的一、三两节的部分内容，在安徽省几个城市对中学生作过讲演．讲演后有一些从事中学数学教学工作的同志和作者谈到，经常为中学生介绍一些课外知识，以开扩他们的眼界，对于提高他们学习数学的兴趣，加深对基础知识的掌握，培养独立思考的能力都是有好处的．这就促使作者把这个讲演稿扩充成这本小册子．

书中首先介绍了一些不常见于中学教材的关于正五边形的知识，然后引伸出几个有趣的数学问题．例如斐波那契数列与黄金分割的关系，数的几何中关于格点正多边形的存在性，图论中的地图着色问题等等．书末所选的习题，都有一定的难度，有的题曾经是国内外的数学竞赛题，希望读者能自己独立做出，并获得比书末所附解答更好的解法．

作者在准备讲演稿时，曾肯成同志提供了许多材料的线索，以后又多次和作者讨论本书的写作提纲．徐澄波、史济怀、常庚哲、陶懋颀、陈龙玄、熊金城、李炯生等同志有的细心地看过本书初稿的全文或部分内容，有的就某些内容作过多次的讨论，提出了不少有益的建议，在此表示衷心的感谢．

本书虽经数度易稿，但由于作者水平所限，错误和不妥之处，恐难避免，欢迎读者批评指正．

作者

1979年3月

目　　录

一、正五边形和黄金分割法 ……………………………1
1. 作图 ……………………………………………1
2. 剪纸 ……………………………………………5
3. 打结 ……………………………………………8
4. 黄金分割及其作图 ……………………………10
5. 黄金分割的应用 ………………………………12
二、斐波那契数列…………………………………20
1. 问题的提出 ……………………………………20
2. 斐波那契数列 …………………………………24
三、格点正多边形…………………………………37
1. 不存在格点正五边形 …………………………37
2. 推广 ……………………………………………38
3. $\cos\theta$ 何时为有理数 …………………………41
四、正五边形和正十二面体………………………47
1. 造型 ……………………………………………47
2. 涂色 ……………………………………………49
3. 地图着色问题 …………………………………53
4. 哈密顿周游世界游戏 …………………………60
练习题解答概要……………………………………63



一、正五边形和黄金分割法

“五星红旗迎风飘扬，胜利歌声多么嘹亮，歌唱我们亲爱的祖国，从今走向繁荣富强……”庄严美丽的国旗和国徽上的五角星，是革命和光明的象征．它曾经照耀着革命先辈为着今天的幸福而流血战斗，也将照耀着我们青年一代，朝着更加美好的共产主义明天继续长征．

正五角星是一个非常有趣的几何图形．把一个正五角星的各个顶点依次用直线连结起来，就得到了一个正五边形（图 1）．反过来，把任一正五边形的各条对角线连结起来，就可以得到一个正五角星，每一条这样的对角线，叫做正五角星的边．从图 1 可见，正五角星的各边又交成一个更小的正五边形；正五边形的对角线与其对边是平行的．以上这些性质，读者从中学几何课本中已经学过．大家可曾想到，与正五边形（或者说正五角星）有关的，还有许多有趣的数学性质，由此还可以引伸出更深入一层的数学问题的讨论．

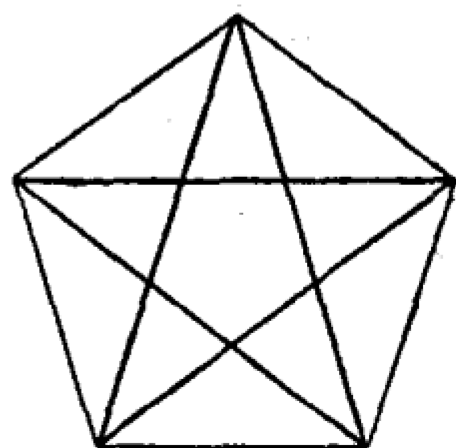


图 1

不过，我们还得先从正五边形说起．

1. 作　图

我们知道，任何正多边形必有一个外接圆，这个圆的圆心，叫做正多边形的中心．如何作一个已知圆的内接正五边

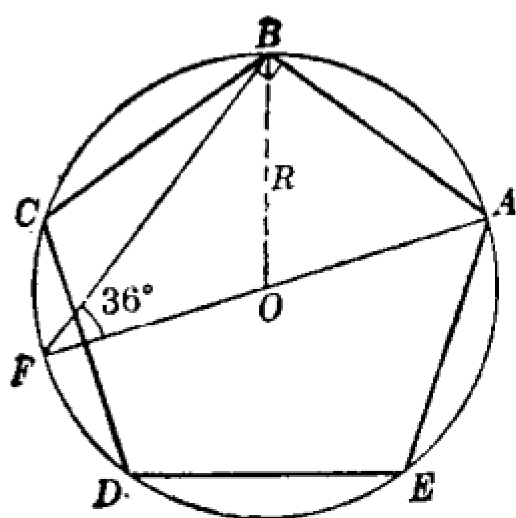


图 2

形呢？

为了得到这个问题的作图方法，我们先进行一些综合性的讨论．如图2所示，设圆 O 的半径为 R，$ABCDE$ 是它的内接正五边形，AF 是圆 O 的直径．因为圆心角

$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ,$$

所以圆周角 $\angle AFB=36^\circ$，由直角 $\triangle AFB$ 得正五边形边长

$$AB=AF\sin 36^\circ=2R\sin 36^\circ. \qquad (1)$$

因此，为了求得正五边形的边长，必须算出 $\sin 36^\circ$ 的值．我们先来计算 $\sin 18^\circ$ 的值．$\sin 18^\circ$ 的值，通常是利用三角学中的倍角公式计算的，下面介绍一种几何方法．

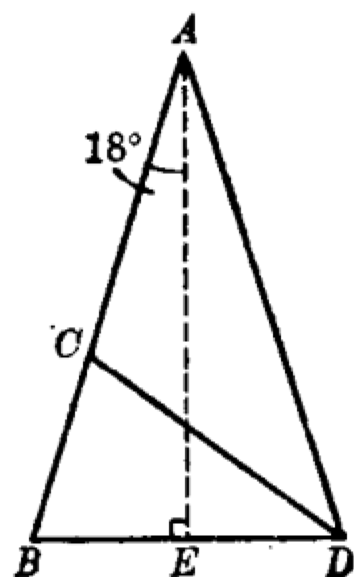


图 3

作一等腰 $\triangle ABD$（图3），使 $AB=AD$，顶角 $\angle BAD=36^\circ$，$AE\perp BD$，那末 $\angle BAE=18^\circ$．

再作 $DC=BD$，由于 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCB$ 都是等腰三角形，且底角 $\angle B$ 公用，所以

$$\triangle ABD\backsim\triangle DCB,$$

于是

$$\frac{BD}{CB}=\frac{AB}{BD}. \qquad (2)$$

又因为 $\angle BDC=\angle BAD=36^\circ$，

$$\angle BDC+\angle CDA=\angle BDA=\frac{180^\circ-\angle BAD}{2}=72^\circ,$$

即得 $\angle CDA=36^\circ=\angle DAC$，所以 $\triangle ADC$ 也是等腰三角形，

所以

$$AC=CD=BD.$$

设 $AB=l$, $AC=BD=x$, 那末 $BC=l-x$. 代入(2)式,得

$$\frac{x}{l-x}=\frac{l}{x},$$

$$x^2+lx-l^2=0.$$

解这个方程,得

$$x=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+4l^2}}{2}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}l.$$

因为 $x=BD>0$, 上式根号前应取正号,即得

$$BD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l,$$

$$BE=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}l,$$

于是得 $\sin 18^\circ=\sin(\angle BAE)=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

有了 $\sin 18^\circ$ 的值,就可以利用三角公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 以及 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, 分别算出

$$\cos 18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$\begin{aligned}\sin 36^\circ&=2\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\times\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\times2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{1}{8}\sqrt{8\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.\end{aligned}$$

将 $\sin 36°$ 的值代入(1)式，便得到圆的内接正五边形的边长

$$AB=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R.$$

下面,我们分析如何作出 AB. 如果已知线段 a、b，根据勾股定理，线段 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 是可以利用圆规和直尺作出的(以 a、b 为直角边的直角三角形的斜边). 在

$$AB=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$$

中,因为

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}=1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

所以

$$AB=\sqrt{R^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2}. \tag{3}$$

而

$$\frac{\sqrt{5}}{2}R=\sqrt{\frac{5}{4}R^2}=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2}R\right)^2}, \tag{4}$$

于是，由(4)式知道，$\frac{\sqrt{5}}{2}R$ 是以 R、$\frac{1}{2}R$ 为直角边的直角三角形的斜边,从而

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}R=\frac{\sqrt{5}}{2}R-\frac{1}{2}R$$

是可以作出的;那末,再由(3)式，AB 也可以利用直角三角形作出.

有了上面的分析,便可得到下面的作法.

作法 (1) 作已知圆 O 的两条互相垂直的直径 AOB、COD(图 4).

(2) 取半径 OC 的中点为 E.

(3) 以 E 为圆心，EA 为半径画弧，交 OD 于 F.

(4) 用 AF 将圆周五等分，即可作出圆 O 的内接正五边形.

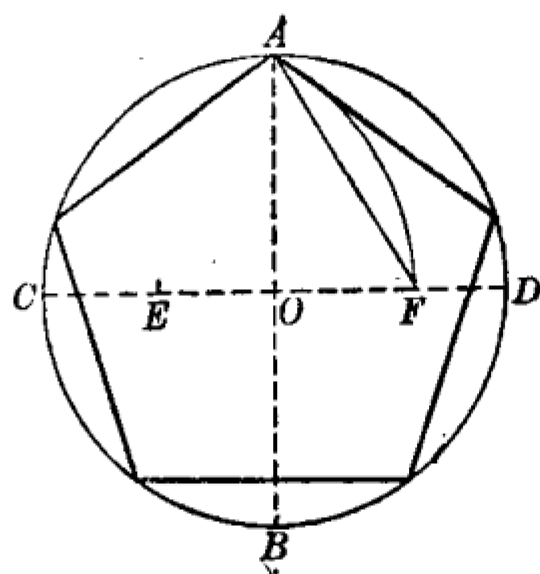


图 4

证明 因为 E 是 OC 的中点(作图步骤 2)，所以 $OE=\frac{1}{2}R$. 由勾股定理，

$$EA^2=OE^2+OA^2=\frac{1}{4}R^2+R^2=\frac{5}{4}R^2,$$

$$EA=\frac{\sqrt{5}}{2}R.$$

而 $EF=EA=\frac{\sqrt{5}}{2}R$ (作图步骤 3)，于是

$$OF=EF-OE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R.$$

所以

$$AF=\sqrt{OA^2+OF^2}=\sqrt{R^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R.$$

这正是以 R 为半径的圆的内接正五边形的边长.

作出正五边形之后，把它的各条对角线连结起来，就得到一个正五角星.

2. 剪　　纸

节日前夕，常要制作许多五角金星. 如果按照上面的几

何作图方法来做，既费事又不易准确．心灵手巧的人并不采用这样的方法，而是用折纸方法，直接可以剪出一个五角星．

方法是这样的：拿一张长方形(或圆形)的纸，先对折，参见图 5(1)；再折成五等分，参见图 5(2)；在五等分的折线上，取点 A 和点 C_1，使 OC_1 比 $\frac{1}{3}OA$ 稍微长一点，沿斜线 AC_1 把图 5(2) 中阴影部分剪掉，然后把纸展开，就得到了一个正五角星，参见图 5(3)．

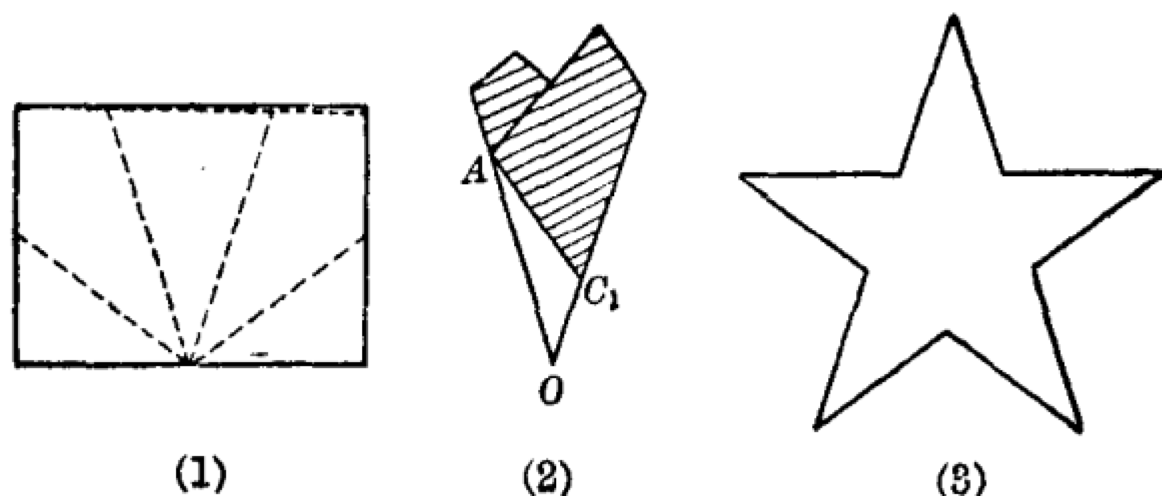


图 5

可以证明，这样剪出的图形，确实非常近似于一个正五角星．

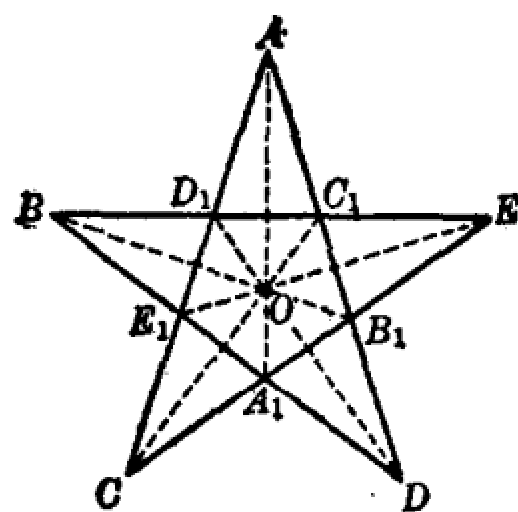


图 6

设 $ACEBD$ 是一正五角星，不难算出五个顶角都是 36°．把它的任一顶点 A 与中心连结起来，并延长至 A_1 (图 6)，则 AA_1 是五角星的一条对称轴(这相当于上述剪法中第一次把纸对折起来，折线即是对称轴)．再作 BOB_1、COC_1、DOD_1、EOE_1，这样我们就把正五角星分成了十个全等的小三角形 AOC_1、AOD_1、BOD_1、…、EOB_1、EOC_1，将这十个小三角形迭合起来(这相当于将纸对折后又折五次，共 10 迭，

剪纸线正是 AC_1、AD_1、…）．现在以 $\triangle AOC_1$ 为例，分析 OC_1 与 OA 的数量关系（图 7）．因正五边形的每个顶角为 36°，所以

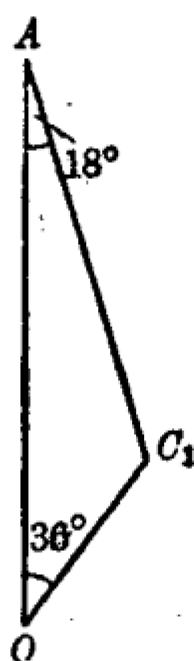


图 7

$$\angle OAC_1=18^\circ,$$

而 $$\angle AOC_1=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ,$$

所以 $$\angle AC_1O=126^\circ.$$

由正弦定理，得

$$\frac{OC_1}{OA}=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 126^\circ}=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 54^\circ},$$

所以

$$OC_1=\frac{\sin 18^\circ}{\sin(3\times 18^\circ)}\,OA=\frac{\sin 18^\circ}{3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ}\,OA$$

$$=\frac{1}{3-4\sin^2 18^\circ}\,OA=\frac{OA}{3-4\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\,OA=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,OA\approx 0.382\,OA.$$

由此可见，前面所说的 OC_1 比 $\frac{1}{3}OA$ 稍为长一点的道理就在这里．如果取 $OA=5\text{cm}$、$OC_1=1.9\text{cm}$，这样剪出的五角星就比较准了．如果取 OC_1 比 $\frac{1}{3}OA$ 长得多 $\left(\text{例如 } OC_1=\frac{1}{2}OA\right)$，

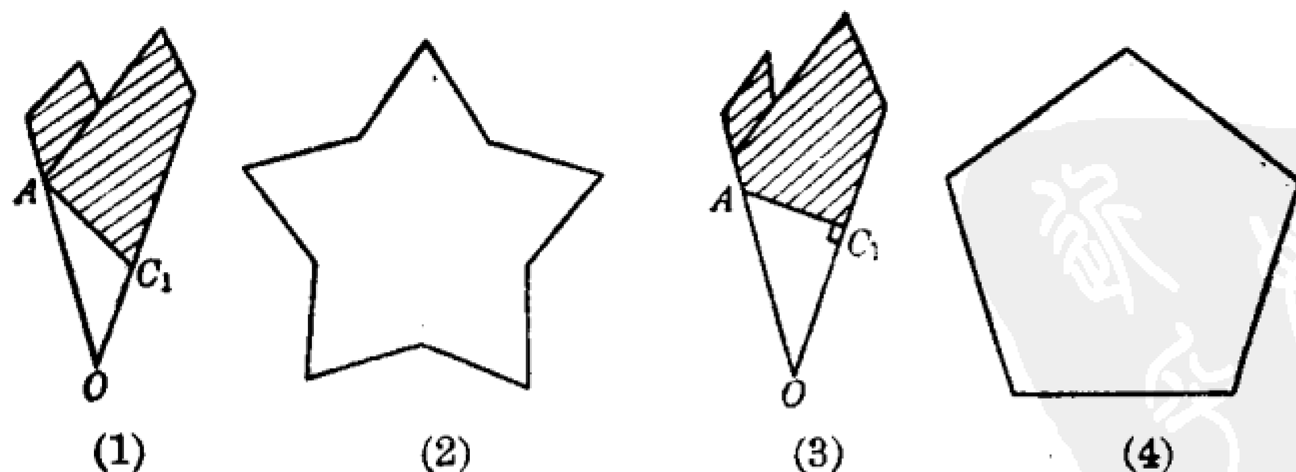


图 8

这时剪出的五角星就不好看，它的五只角的边比较短，见图8(1)、(2)；当沿直角方向剪去，它的五只角完全没有了，而成了一个正五边形，见图8(3)、(4). 这里的道理，请读者自己说明.

3. 打　结

上面讲了用折纸法剪出一个正五角星或正五边形的方法，现在介绍一种用长方形纸条打结，得到一个正五边形的方法. 结法是这样的：如图9(1)所示，先把纸条打好一个结，然后拉紧压平(注意不使它有皱纹)，再截去伸出的部分(图9(2)中的阴影部分)，便结成一个正五边形了.

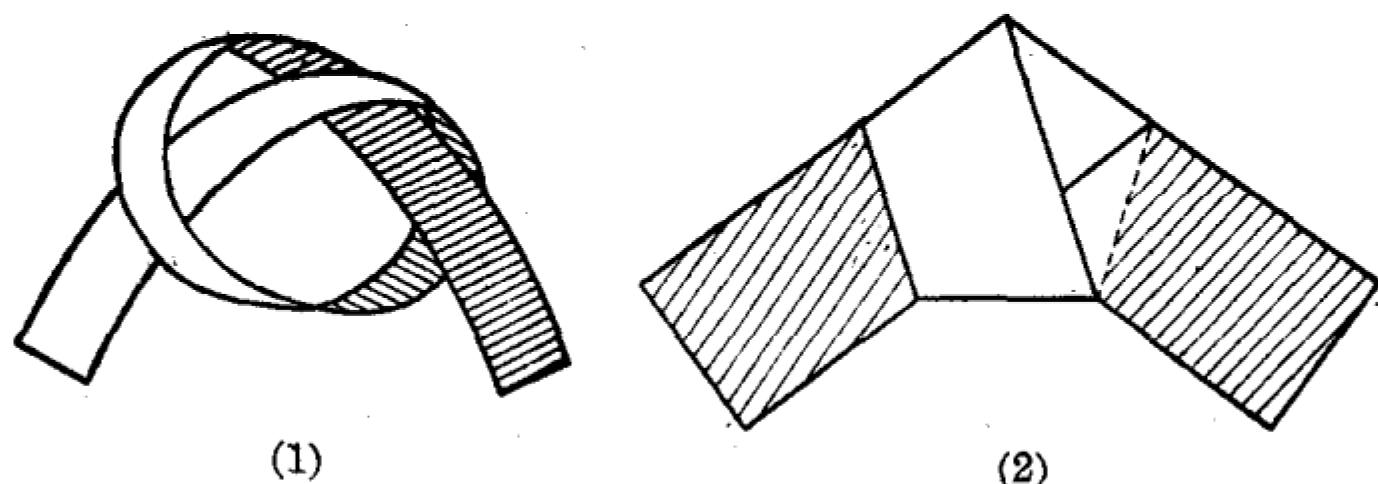


图 9

下面，我们来证明打结出来的图形是一个正五边形. 阅读这个证明时，建议读者按图9作一实物对照.

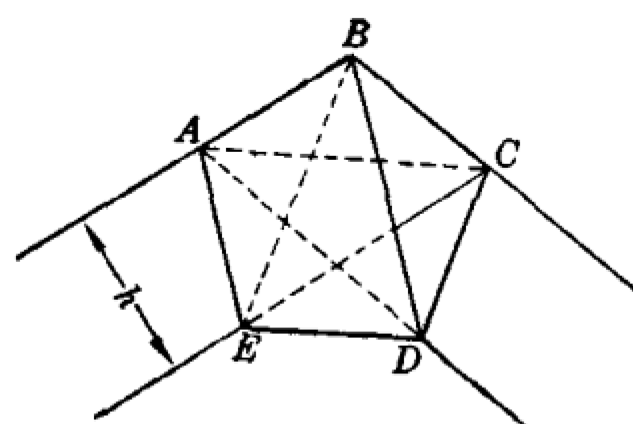


图 10

分析　容易看出，所结出来的图形是一个凸五边形. 为了证明它是一个正五边形，需要证明它的五条边及五个角相等. 要证明五条边及五个角相等，只要证明图10中的五个三角形：

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ 是全等三角形就可以了.

证明 由于纸条的宽度各处是一样的(记作 h), 所以在 $\triangle AEB$ 中, AB 和 AE 上的高相等(都等于 h), 因此 $\triangle AEB$ 是等腰三角形,即有

$$AB=AE.$$

同理,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$AB=BC,\ BC=CD,$$

所以

$$AB=BC=CD=AE. \tag{1}$$

(注意:不能用上面的方法证明 $\triangle CDE$ 是等腰三角形, 为什么?)

又, 根据同样的道理, $\triangle ADB$ 和 $\triangle BEC$ 都是等腰三角形,所以

$$AD=BD,\ BE=CE. \tag{2}$$

因为纸条的边缘是平行的, 即 $AB /\!/ EC$, $BC /\!/ AD$, 由(1)式 $AE=BC$, $AB=CD$, 所以四边形 $EABC$ 和四边形 $ABCD$ 都是等腰梯形,所以

$$BE=AC,\ BD=AC.$$

再由(2)式,得

$$BE=AC=BD=AD=CE.$$

又 $AE /\!/ BD$, $AD=BE$, 所以四边形 $ABDE$ 是等腰梯形,故有 $AB=DE$, 结合(1)式,即得

$$AB=BC=CD=DE=EA.$$

所以

$$\triangle EAB \cong \triangle ABC \cong \triangle BCD \cong \triangle CDE \cong \triangle DEA.$$

这就证得了 $ABCDE$ 是一个正五边形.

4. 黄金分割及其作图

先讲正五边形对角线的一个性质.

设 $ABCDE$ 为一正五边形(图 11), 对角线 AC 和 BE 相交于 F, 那末

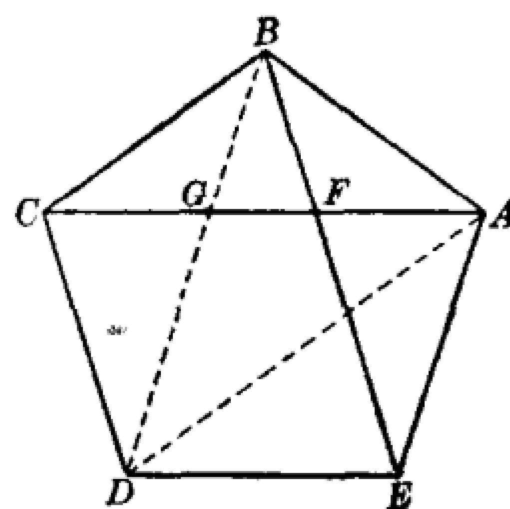


图 11

$$\frac{CF}{AC}=\frac{AF}{CF}, \qquad (1)$$

即

$$CF^2=AC\cdot AF. \qquad (2)$$

证明 因 $AC /\!/ DE$, $BE /\!/ CD$, 故 $FCDE$ 是一平行四边形. 即有

$$EF=CD=AE=ED=FC,$$

所以 $\triangle AEF$ 是一等腰三角形. 由 $\angle AFE=\angle ACD$, 得

$$\triangle ACD \backsim \triangle EAF.$$

所以
$$\frac{CD}{AC}=\frac{AF}{AE},$$

这就证得了
$$\frac{CF}{AC}=\frac{AF}{CF}.$$

利用同样的方法, 可以证明图 11 中点 G 分线段 FC 成类似的比例(或由后面的例题直接得到):

$$\frac{CG}{CF}=\frac{FG}{CG}.$$

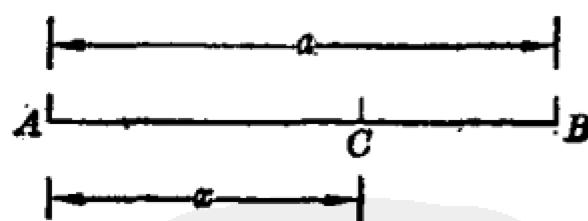


图 12

一般地, 设已知线段 AB, 若 AB 上的点 C 将 AB 分成两段, 使大段为全段和小段的比例中项, 即

$$BC:AC=AC:AB,$$

或

$$AC^2=AB\cdot BC, \qquad (3)$$

则称点 C 内分线段 AB 成中外比.

据此,前面证明的性质可叙述为:正五边形的任意两条相交的对角线,互相内分成中外比.

下面介绍分线段 AB 成中外比的内分点的几何作图.

分析 设全段 $AB=a$, 大段 $AC=x$, 于是小段

$$BC=a-x.$$

由(3)式知 $x^2=a(a-x)$, 即 $x^2+ax-a^2=0$, 解这个方程,得

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}.$$

舍去负根,得

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a. \qquad (4)$$

为便于作图,将(4)式改写为

$$AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

于是,由勾股定理,得内分点 C 的作图方法如下:

作法 (1) 过点 B, 作 $BD\perp AB$, 取 $BD=\frac{1}{2}AB$.

(2) 连结 AD, 则

$$AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

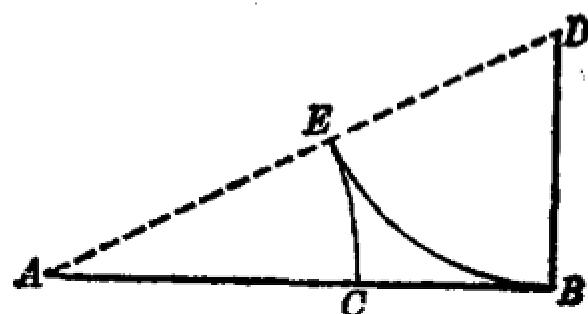


图 13

(3) 以 D 为圆心, DB 为半径画弧,交 AD 于 E, 则

$$AE=AD-BD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

(4) 以 A 为圆心, AE 为半径画弧,交 AB 于 C, 点 C 就是所求的内分点.

请读者注意，(4)式所揭示的内分点的性质

$$\frac{\text{大段长}}{\text{全段长}}=\frac{\text{小段长}}{\text{大段长}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

在以后的讨论中将多次用到.

现在回到正五边形的讨论. 由(1)式可知

$$\frac{CF}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

且 $CF=CD$(图 11)，即 $\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这就是说，正五边形边长与对角线之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这个事实在后面也要用到.

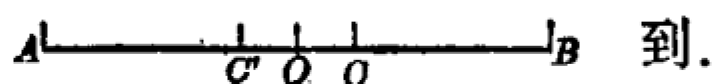


图 14

［例］ 设点 C 内分 AB 成中外比，则点 C 在 AB 上的对称点 C'，必内分大段 AC 成中外比(图 14).

证明 由对称性，可知 $AC'=BC$. 所以

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

即点 C' 内分 AC 成中外比.

内分已知线段成中外比的作图方法，也叫做**黄金分割法**. 它在二千多年前就由希腊数学家欧多克斯 (Eudoxos) 发现，由于这个方法在平面几何中具有重要的地位，所以人们给了它这个称号. 在下一小节中，将介绍它的一些应用.

5. 黄金分割的应用

黄金分割法在平面几何中有许多应用，下面举几个几何作图的例子.

1．作已知圆的内接正十边形.

分析 如图15所示，A_1A_2是半径为R的圆O的内接正十边形的一边．连结OA_1，OA_2，作$OB\perp A_1A_2$，那末

$$\angle A_1OB=\frac{1}{2}\angle A_1OA_2=18^\circ,$$

所以 $$A_1A_2=2A_1B=2OA_1\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R.$$

这就是说，A_1A_2是内分半径OA_1成中外比的大段．作出这个大段后，就可用大段长将圆O十等分.

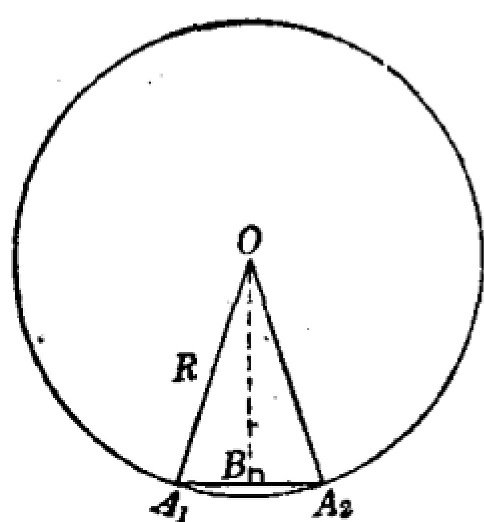


图 15

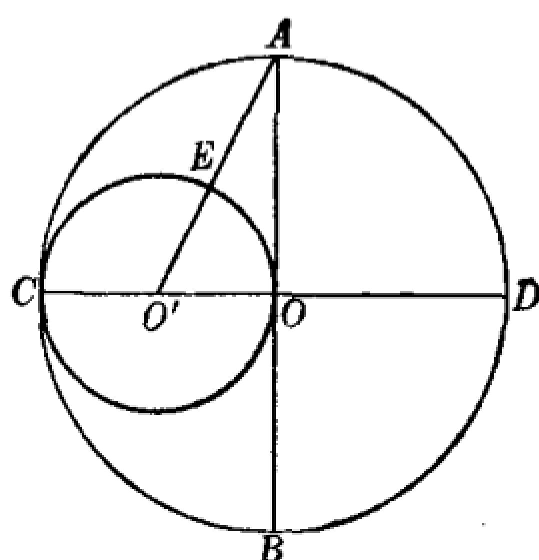


图 16

在上述分析的基础上，即可得出如下作图方法.

作法 作圆O的两条互相垂直的直径AOB和COD(图16)．以OC为直径，作圆O'．连结AO'交圆O'于E．AE即为圆O的内接正十边形的边长.

2．已知一边长，作正五边形.

读者一定会想到，只要作出任意一个圆的内接正五边形，就可用相似法作出符合要求的正五边形．是否还有更简便的方法呢？

设正五边形边长为a，对角线长为x，由上一小节可知

$$\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

所以

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}-1}a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{a}{2}.$$

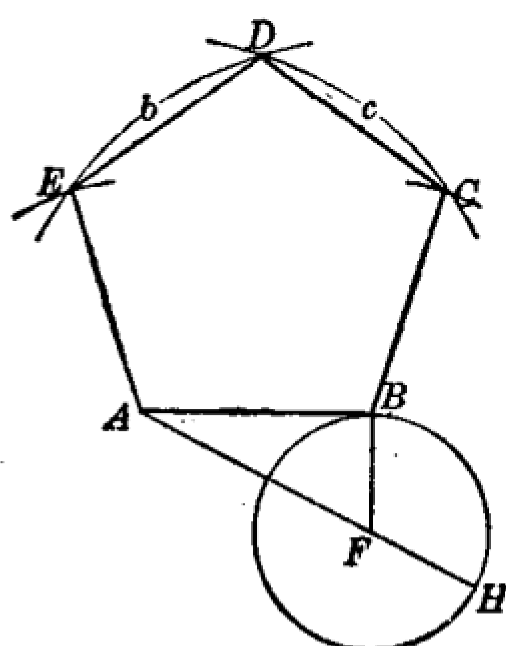


图 17

作法 作已知边长 AB（图17）．过 B 点作 $BF\perp AB$，取

$$BF=\frac{1}{2}AB.$$

以 F 为圆心，FB 为半径画圆．连结 AF，并延长，交圆 F 于 H．分别以 A、B 为圆心，AH 为半径画弧 c、b，两弧交于 D．以 A 为圆心，AB 为半径画弧，交弧 b 于 E；以 B 为圆心，AB 为半径画弧，交弧 c 于 C，连结 BC、CD、DE 和 EA，则 $ABCDE$ 就是所求的正五边形．

3．已知一边长，作正五角星．

正五边形的五条对角线，即构成正五角星．这些对角线的长，就是正五角星的边长．因此，已知一边长作正五角星，可以看成是已知对角线作正五边形．而正五边形边长等于内分对角线成黄金分割的大段，这样正五边形可以作出，那末正五角星也随之而确定．

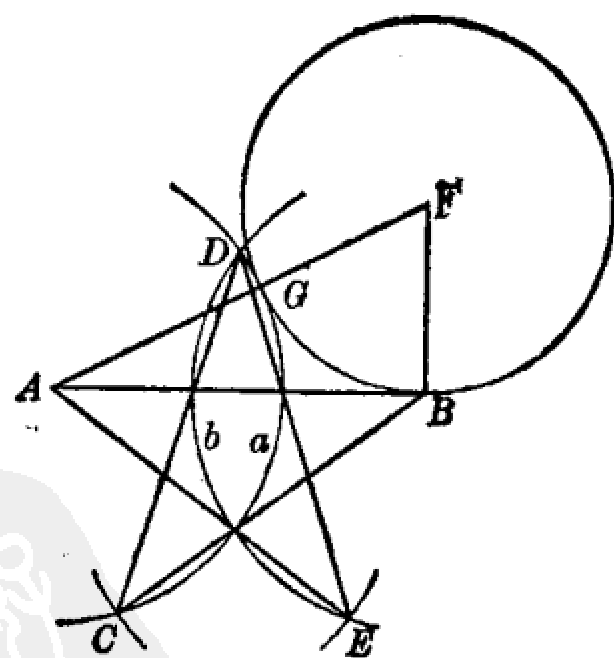


图 18

作法 作已知边长 AB（图18）．过 B 点作 $BF\perp AB$，取

$$BF=\frac{1}{2}AB.$$

以 F 为圆心，BF 为半径画圆．连结 AF，交圆 F 于 G．分

别以 A、B 为圆心，AG 为半径画弧 a、b，两弧交于 D. 以 A 为圆心，AB 为半径画弧，交弧 b 于 E；以 B 为圆心，AB 为半径画弧，交弧 a 于 C. 连结 BC、CD、DE 和 EA，则 $ABCDE$ 就是所求的正五角星.

下面谈谈黄金分割在其他方面的应用.

首先说美术. 由于人的眼睛是有"错觉"的，我们看到的物象，与几何图形就略有差别. 比如说，当我们看一个正方形时，往往会觉得竖边稍长，横边稍短，略象长方形；看上方的东西往往会觉得大，看下方的东西觉得小. 因此，看一个长方形时，得到的视象略象梯形. 于是，画家利用这种错觉，在画正方形时，故意把横边画得比竖边稍微长些，把上方横边画得比下方横边稍微短些(都约为 3%)，这样画出的图形，从几何上说是等腰梯形，而不是正方形. 虽然不符合几何学的要求，但看起来却是正方形. 这样的等腰梯形，叫做"视觉正方形". 视觉正方形虽比几何正方形好看，但据美学家和画家的研究，认为黄金分割型的矩形——短边与长边之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形最好看，它比视觉正方形更好看.

黄金分割型的矩形为什么最好看呢？原来黄金分割型的矩形具有这样一个性质：以短边为边，在这个矩形中分出一个正方形后，余下的矩形与原来的矩形相似，仍是一个黄金分割型的矩形.

在图 19 中，设

$$\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

因为 $ABFE$ 是正方形，所以

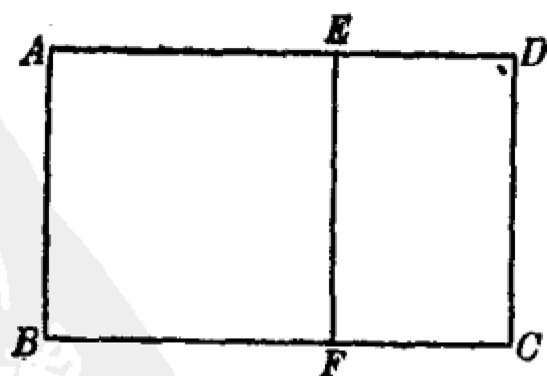


图 19

$$\frac{ED}{EF}=\frac{AD-AE}{EF}=\frac{AD}{AB}-1=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-1$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

即 $EFCD$ 也是黄金分割型的矩形.

反之，若在一个矩形中，以短边为边分出一个正方形后，所得的矩形与原来的矩形相似，那末这个矩形一定是黄金分割型的. 请读者自己证明.

因为黄金分割型矩形看起来比较“和谐”，日常生活中的许多矩形用品(如书本,桌面,衣橱等)和建筑物中的一些矩形结构(如窗户，房间等)，都常设计成接近于黄金分割的式样;我们常见的一些图画和照片,主要人物或惹人注意的物象,并不放在正中，而略偏于正中(注意，视觉的中心线也略偏于几何中心线)，接近于黄金分割处. 此外，黄金分割也被用于声学,如二胡的“千斤”放在黄金分割处音色最好.

最后,简单谈谈黄金分割法与优选法的关系. 近年来,由于优选法的应用和推广,即使是不熟悉优选法的人,大概也听到过 0.618 这个数字. 实际上 0.618 是取

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339887\cdots$$

的一个近似值. 先举一个例子，说明 0.618 这个数字在优选法中的作用.

例如，为了某种需要(如淬火、焙烧等)，要在 800～900°C 的范围内选择出最佳温度.

把 800～900°C 看成长为 100 的线段 AB (图 20). 第一

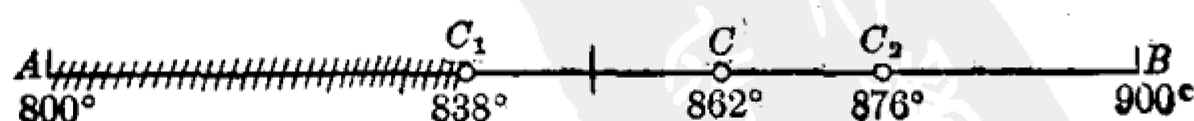


图 20

次，先在线段 AB 的黄金分割点 C——即 0.618 处做试验，C 点的温度是 $800+100\times0.618\approx862°$. 然后，在 C 点的对称点 C_1——即 0.382 处做试验，由第 4 小节的例可知，C_1 也是线段 AC 的黄金分割点，这点的温度是

$$(800+900)-862=838°.$$

然后，比较 C、C_1 两点的效果，如果 C 点的效果好(称 C 点为'好'点，C_1 点为'坏'点)，理论的分析证明，这时最佳点一定在线段 C_1B 上，因而将坏点的一头——线段 AC_1 去掉，继续在 C_1B 上 C 点的对称点 C_2 作试验. 这里，C_2 仍是线段 C_1B 及 CB 的黄金分割点. C_2 点的温度可类似于 C_1 点计算，即 $(838+900)-862=876°$. 再比较点 C 及 C_2 的效果，若 C_2 比 C 好，仍去掉坏点的一头——线段 C_1C，留下线段 CB，继续在 CB 上 C_2 的对称点做试验……如此继续下去，每次留下的要试验的区间都只有前一个区间的 0.618 倍，又因为开始要用两个点，因此作了 $n+1$ 次试验后，所余下的区间就只有原来长度的 $(0.618)^n$ 倍. 例如，本例作了 11 次试验后，所余下的区间只有原来长度的

$$(0.618)^{10}\approx0.0081.$$

也就是说，11 次试验后得到的好点与最佳点最多相差 0.8 度.

为什么把试验点选在黄金分割处呢？下面作一个直观的解释. 为方便起见，设试验范围是一个单位长，即区间[0, 1]. 为了比较试验的结果，至少得在两个点 C、C_1 上作试验(图 21)，但在试验前，我们不知 C、C_1 哪一点好，而在这两点作试验后，总要去掉一头，即[0, C]或[C_1, 1]. 因为它们去掉的可能性相同，这就要求这两段一样

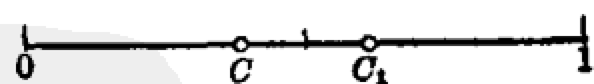


图 21

长较合适，即

$$C=1-C_1. \tag{1}$$

也就是说，C、C_1 是对称点. 经过比较后，如果去掉线段 $[C_1, 1]$，留下 $[0, C_1]$，其中 C 点已做过试验，于是 C 点在 $[0, C_1]$ 中的位置与 C_1 在原来线段 $[0, 1]$ 中所处的位置一样，即比例相等，也就是

$$1:C_1=C_1:C \quad 或 \quad C_1^2=C.$$

于是，由(1)式，得

$$C_1^2+C_1-1=0,$$

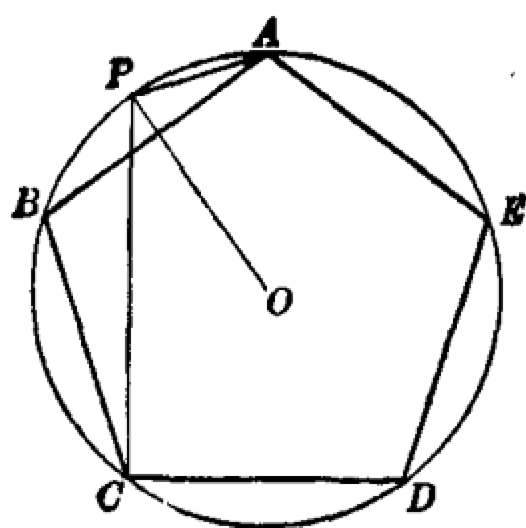
解这个方程，并取正根，得

$$C_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$$

练 习 题 一

1. 如图，O 为正五边形 $ABCDE$ 的外接圆圆心，P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 中点，求证

$$PC=PA+PO.$$



(第 1 题图)

2. 在直径为 AB 的半圆上求一点 P，使由点 P 向 AB 所引的垂线足 Q 在 AB 上截得 $AQ=BP$.

3. 正五边形的五条对角线围成一个小正五边形（参看图 1），作此小正五边形的五条对角线，又得一个更小的正五边形，如此继续下去，得到一个无穷递缩正五边形序列，设原来正五边形面积为 S_0，求所有这些正五边形面积之和.

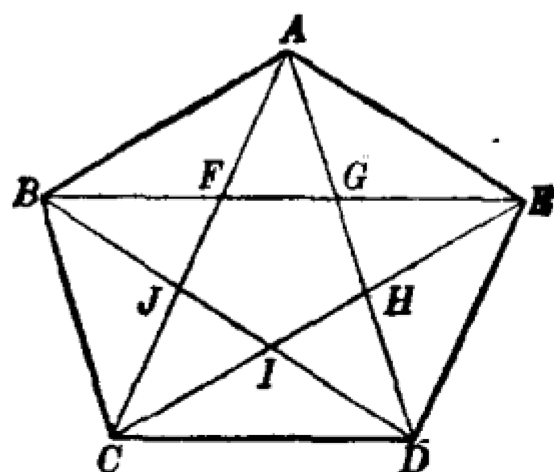
4. 证明 $\cos 5°+\cos 77°+\cos 149°+\cos 221°+\cos 293°=0$.

提示：作一边长为 1 的正五边形，并在其一顶点向正五边形外作一直线，使与一边的交角为 5°，再利用投影考虑.

5. 从一个矩形 R 中，分出一个以短边为边长的正方形后，得一矩形 R'，再从 R' 中按同样的方式分出一正方形，又得一矩形 R''，如果 R'' 与 R 相似，则矩形 R 叫做近似黄金分割型矩形. 求近似黄金分割型矩形的长边与短边的比为何值.

6. 设 A_1、A_2、A_3、A_4 和 A_5 为正五边形的五个顶点，其中每两点连成一条线段，这样 10 条线段的平方和记为 Q；其中每三点连成一个三角形，这样 10 个三角形面积的平方和记为 P. 求证：

$$\frac{Q^2}{P}=80.$$



(第 7 题图)

7. 设 $ABCDE$ 是任一凸五边形，

$S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}$

(其中 S_{ABC} 表示 $\triangle ABC$ 的面积，其余类推).

(1) 求证：任何两条相交的对角线相互黄金分割.

(2) 设 $S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}=1$，试分别求五边形 $ABCDE$ 的面积，五角星 $ACEBD$ 及五边形 $FGHIJ$ 的面积.

(3) 求作一凸五边形，使 $S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}=1$.

8. (1) 平面上任给四点，要求两两距离(共六个)只取两个值 a 和 b，问这四点的位置情况如何？

(2) 平面上任给五点，设其两两距离(共十个)只取两个值 a 和 b，证明这五个点构成一个正五边形.

二、斐波那契数列

1. 问题的提出

从上一节的讨论，我们见到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$ 是一个很有用的、有趣的数字，它是一条定长线段（连续量）分成特殊的两段时，大段长与全段长之比的比值．对于离散的量，怎样来考虑黄金分割呢？

设有 $n(>1)$ 个物体，要分成两堆，问怎样分法最接近于黄金分割？

为什么在问题中说成"最接近于黄金分割"呢？这是因为，如果把 n 看成是一条线段的长，这时按照黄金分割，大段应等于 $n\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，但 $n\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 不是整数，这样，对于 n 个物体，就无法分得黄金分割——使小堆的物体数与大堆的物体数之比，等于大堆的物体数与全部物体数之比．

因为 $n\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 不是整数，所以必存在正整数 k，使得

$$k<n\frac{\sqrt{5}-1}{2}<k+1.$$

设 $n\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 较接近于 k，即

$$n\frac{\sqrt{5}-1}{2}-k<k+1-n\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

则显然 $\frac{k}{n}$ 是以 n 为分母的分数中最接近于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的，也就是说，这时把 n 个物体分成 k 个和 $(n-k)$ 个两堆，是最接近于黄金分割的.

上面的问题，可一般地叙述为：把任何一个正整数 $n(n>1)$ 分成两个正整数 l 及 m（设 $m\geqslant l$），即

$$n=l+m,$$

使 $\frac{m}{n}$ 是以 n 为分母的分数中最接近于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的．以后，为简便起见，把所谓黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 记作 ω.

我们知道，任何无理数 α 都可以用有理数逼近（即 α 是某个分数列的极限）．现在我们想找到一串分数列

$$\frac{a_n}{b_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\omega.$$

而且 $\frac{a_n}{b_n}$ 是所有分母小于或等于 b_n 的分数中最接近于 ω 的.

为此，先用一种近似方法来解确定黄金数 ω 的二次方程

$$f(x)=x^2+x-1=0. \tag{1}$$

因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，于是抛物线 $y=x^2+x-1$ 必在 0 与 1 之间穿过 x 轴．所以，方程(1)必有介于 0 与 1 之间的正根 x^*．因为 $0<x^*<1$，所以 x^{*2} 就更小了．如果在(1)中忽略 x^2 项，则(1)成为

$$x-1=0,\quad 即\quad x=1.$$

因此，可以把 1 看作是方程(1)的那个介于 0 与 1 之间根的一个近似值，记作 $a_0=1$，它叫做方程(1)的第零次近似根．当

然，这个近似根与方程(1)的根之间的误差较大，为了求得更好的近似根，将(1)式变形为

$$x=\frac{1}{1+x}. \tag{2}$$

将 $a_0=1$ 代入 $\frac{1}{1+x}$，可求出改善后的近似根

$$a_1=\frac{1}{1+a_0}=\frac{1}{2}(=0.5),$$

称 a_1 为方程(1)的第一次近似根．与此类似，逐次把改善后的近似根代入(2)式右边，就得到一系列的近似根：

$$a_2=\frac{1}{1+a_1}=\frac{2}{3}(\approx 0.666),$$

$$a_3=\frac{1}{1+a_2}=\frac{3}{5}(=0.6),$$

$$a_4=\frac{1}{1+a_3}=\frac{5}{8}(=0.625),$$

$$a_5=\frac{1}{1+a_4}=\frac{8}{13}(\approx 0.615),$$

$$a_6=\frac{1}{1+a_5}=\frac{13}{21}(\approx 0.619),$$

$$a_7=\frac{1}{1+a_6}=\frac{21}{34}(=0.6176\cdots),$$

$$a_8=\frac{1}{1+a_7}=\frac{34}{55}(=0.6181\cdots),$$

$$a_9=\frac{1}{1+a_8}=\frac{55}{89}(=0.6179\cdots),$$

……

一般地，

$$a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}. \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{3}$$

我们将上述计算方法无限地继续下去，就得到一个无穷

的分数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

从上面列出的数据可见，它们越来越接近于黄金数

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618033\cdots$$

在下一小节将证明：分数列 $\{a_n\}$ 有极限，且极限值为 ω，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\omega.$$

于是，同样有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\omega.$$

这样，如在(3)式两边取极限，可得

$$\omega=\frac{1}{1+\omega},$$

或 $$\omega^2+\omega-1=0.$$

这就是说：如果(3)式求得的近似根数列有极限 ω，则 ω 就是方程(1)的一个根. 这种求方程的近似根的方法，是近代数学中一个重要方法——迭代法，(3)式则称为迭代式.

观察上面的分数序列

$$a_0=\frac{1}{1},\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{2}{3},\quad a_3=\frac{3}{5},\quad a_4=\frac{5}{8},\ \cdots$$

可以看出这一数列存在着这样的规律：设 $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=F_1+F_2$, $\cdots$, 一般地

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

那末

$$a_0=\frac{F_1}{F_2},\quad a_1=\frac{F_2}{F_3},\quad a_2=\frac{F_3}{F_4},\ \cdots$$

$$a_{n-1}=\frac{F_n}{F_{n+1}},\quad a_n=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}},$$

对此，可用数学归纳法证明如下：

(1) 当 $n=1$ 时，可以直接验证 $a_n=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$.

(2) 假设当 $n=k-1$ 时结论成立，即 $a_{k-1}=\frac{F_k}{F_{k+1}}$，那末由迭代式(3)

$$a_k=\frac{1}{1+a_{k-1}}=\frac{1}{1+\frac{F_k}{F_{k+1}}}=\frac{F_{k+1}}{F_k+F_{k+1}}=\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}.$$

这就证得结论对 $n=k$ 也成立. 从而，这一结论对一切自然数 n 成立.

2. 斐波那契数列

现在研究由 $F_1=1$, $F_2=1$ 及递推关系

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

所确定的数列. 这个数列的前几项是

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

数列 $\{F_n\}$ 叫做**斐波那契**(Fibonacci)**数列**，简称 F-数列. 它是 13 世纪意大利数学家斐波那契研究这样一个有趣的问题时提出来的.

设每一对大兔每月能生出一对小兔，而每一对小兔过一个月就能成长为大兔，如果不发生死亡，问由一对大兔开始，一年后能有多少对大兔？

设开始时大兔的对数为 F_1，过一个月后是 F_2，过两个月后是 F_3. 一般地，以 F_{n+1} 表示过了 n 个月后的大兔对数. 由题设条件 $F_1=1$，过一个月后，它们生出了一对新的小兔，所以这时大兔的对数仍为 $F_2=1$，再过一个月，这对小兔成长了，并且最初的一对大兔又生出一对小兔，所以这时大兔对

数 $F_3=2$，如此继续下去，可以得到

$$F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\cdots$$

一般地，第 $n+1$ 月后的大兔对数 F_{n+2} 是由两部分构成的；一部分是第 n 个月后的大兔对数 F_{n+1}，一部分是由第 $n-1$ 个月后的大兔(对数为 F_n)在第 n 个月时生出的 F_n 对小兔成长起来的，即

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}.\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

此式与定义 F-数列的递推关系(1)相同，并且有 $F_1=1$，$F_2=1$，由此可以递推地算出兔子问题的解是

$$F_{13}=233.$$

F-数列有许多有趣的性质，我们列出其中的一些：

1. $F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$；

2. $F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$；

3. $F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$；

4. $F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$；

5. $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$；

6. $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$；

7. $F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=(-1)^n$.

对于这些性质，运用数学归纳法及递推关系(1)，是不难证明的. 下面我们来证明性质 7 和性质 5，其余的性质由读者自己证明.

用数学归纳法证明性质 7.

证明 (1) 当 $n=1$ 时，$F_2^2-F_1F_3=1-2=(-1)^1$，所以性质 7 是成立的.

(2) 假设当 $n=k$ 时，性质 7 成立，即

$$F_{k+1}^2-F_kF_{k+2}=(-1)^k,$$

那末，当 $n=k+1$ 时，

$$F_{k+2}^2-F_{k+1}F_{k+3}=F_{k+2}^2-F_{k+1}(F_{k+1}+F_{k+2})$$
$$=F_{k+2}(F_{k+2}-F_{k+1})-F_{k+1}^2=F_{k+2}F_k-F_{k+1}^2$$
$$=-(F_{k+1}^2-F_kF_{k+2})=-(-1)^k=(-1)^{k+1},$$

性质 7 也成立. 根据(1)、(2), 就证得了对于一切自然数 n, 性质 7 是成立的.

性质 5 的证明 对 m 进行归纳.

(1) 当 $m=1$ 时, $F_{n-1}F_1+F_nF_2=F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$, 所以性质 5 是成立的.

当 $m=2$ 时, 因为

$$F_{n-1}F_2+F_nF_3=F_{n-1}+2F_n=F_{n-1}+F_n+F_n$$
$$=F_{n+1}+F_n=F_{n+2},$$

故 $m=2$ 时性质 5 也成立.

(2) 下面采用归纳推演形式, 假设当 $m=k$、$m=k+1$ 时, 性质 5 成立, 即

$$F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1},$$
$$F_{n+k+1}=F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2},$$

推证它对 $m=k+2$ 也成立.

将上面两式相加, 得

$$F_{n+k}+F_{n+k+1}=F_{n-1}(F_k+F_{k+1})+F_n(F_{k+1}+F_{k+2}),$$
$$\therefore\quad F_{n+k+2}=F_{n-1}F_{k+2}+F_nF_{k+3}.$$

根据(1)、(2), 性质 5 是成立的.

由性质 7, 可以得到下面两个推论.

推论 1 $\left|\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}-\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}.$

证明 将性质 7 变形为 $\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}-\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{(-1)^n}{F_{n+1}F_{n+2}}$, 再两边取绝对值, 就得到上述结论.

推论 2 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 是既约分数.

证明 若 F_n 与 F_{n+1} 有公因子 k, 由性质 7, k 必整除 1, 所以 $k=1$.

前面,斐波那契数列是用一种递推方式来定义的,现在来求 F_n 的通项公式.

首先,注意到仅由递推关系式

$$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}. \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

并不能唯一地确定数列 $\{u_n\}$, 但是, 如果还知道 u_1 及 u_2, 这个数列就可以用递推的方式唯一地确定了. 例如: 若 $u_1=1$, $u_2=1$, 则

$$u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5,\ u_6=8,\ \cdots,$$

这就是斐波那契数列. 而若 $u_1=1$, $u_2=3$, 则

$$u_3=4,\ u_4=7,\ u_5=11,\ \cdots$$

若 $u_1=4$, $u_2=1$, 则

$$u_3=5,\ u_4=6,\ u_5=11,\ \cdots$$

这就使我们想到,是否可以这样来求 F_n 的通项公式,先设法找出一个含有两个待定常数的数列 $\{u_n\}$, 使它满足递推关系(2), 然后由 $u_1=1$ 及 $u_2=1$ 把待定常数求出来. 现设有一首项为 a, 公比为 q 的无穷等比数列 $u_n=aq^{n-1}(n=1, 2, \cdots)$, 要求它满足(2)式, 为此将 u_n, $u_{n+1}=aq^n$ 及 $u_{n+2}=aq^{n+1}$ 代入(2)式,得

$$aq^{n+1}=aq^{n-1}+aq^n. \quad (n=1, 2, \cdots)$$

不妨设 $a\neq0$, $q\neq0$, 消去公因子 aq^{n-1}, 得

$$q^2-q-1=0,$$

解这个方程,得

$$q_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

这就是说，等比数列 aq_1^{n-1} 及 aq_2^{n-1} 都能满足递推关系(2)，但它们都只有一个待定常数，不能要它同时满足 $u_1=1$ 及 $u_2=1$ 这两个条件. 于是，我们转而考虑含有两个待定常数的数列 $u_n=aq_1^{n-1}+bq_2^{n-1}$，看它是否也能满足递推关系(2). 事实上，由 $1+q_1=q_1^2$ 及 $1+q_2=q_2^2$，得

$$\begin{aligned} u_n+u_{n+1} &= (aq_1^{n-1}+bq_2^{n-1})+(aq_1^n+bq_2^n) \\ &= aq_1^{n-1}(1+q_1)+bq_2^{n-1}(1+q_2) \\ &= aq_1^{n+1}+bq_2^{n+1}=u_{n+2}. \end{aligned}$$

这就是说，数列

$$u_n=aq_1^{n-1}+bq_2^{n-1}=a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$
$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

是满足(2)式的，分别令 $n=1$、2，得

$$\begin{cases} 1=u_1=a+b, \\ 1=u_2=a\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+b\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

解这个方程组，得待定常数

$$a=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

将它们代入 $aq_1^{n-1}+bq_2^{n-1}$，就得到斐波那契数列的通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (3)$$

这个公式是很有趣的，虽然斐波那契数是正整数，但却用无理数表示出来. 由于 $0<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<1$，如果当 n 是偶数时，有 $0<\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n<1$，那末 F_n 等于 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 的整数部分；如果当 n 是奇数时，有 $0<-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n<1$，那末

F_n 等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 的整数部分加 1.

从 F_n 的通项公式(3)可见，F–数列与黄金数有密切的联系，因为

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\omega,\quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{1}{\omega}=\omega^{-1},$$

所以
$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\omega^{-n}+(-1)^{n+1}\omega^n].$$

定理 1 $F_n-\omega F_{n+1}=(-1)^{n+1}\omega^{n+1}$，即

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\omega+(-1)^{n+1}\frac{\omega^{n+1}}{F_{n+1}}. \tag{4}$$

证明 因 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\omega^{-n}+(-1)^{n+1}\omega^n]$ 及 $\omega^2=1-\omega$，得

$$\begin{aligned}\omega F_{n+1}&=\frac{\omega}{\sqrt{5}}[\omega^{-(n+1)}+(-1)^{n+2}\omega^{n+1}]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}[\omega^{-n}+(-1)^n\omega^{n+2}].\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}F_n-\omega F_{n+1}&=\frac{1}{\sqrt{5}}[(-1)^{n+1}\omega^n-(-1)^n\omega^{n+2}]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}[(-1)^{n+1}\omega^n+(-1)^{n+1}\omega^n(1-\omega)]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}[2(-1)^{n+1}\omega^n-(-1)^{n+1}\omega^{n+1}]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}\omega^n\left(2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^{n+1}\omega^n\frac{5-\sqrt{5}}{2}\\&=(-1)^{n+1}\omega^{n+1}.\end{aligned}$$

定理 2

$$\frac{F_1}{F_2}>\frac{F_3}{F_4}>\cdots>\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}>\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}>\cdots>\omega>\cdots$$
$$>\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}>\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}>\cdots>\frac{F_4}{F_5}>\frac{F_2}{F_3}.$$

证明 在(4)式中，n 分别取偶数或奇数时，有

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}=\omega-\frac{\omega^{2n+1}}{F_{2n+1}}<\omega; \tag{5}$$

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}=\omega+\frac{\omega^{2n}}{F_{2n}}>\omega. \tag{6}$$

又由(5)式，得

$$\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}=\omega-\frac{\omega^{2n+3}}{F_{2n+3}},$$

所以
$$\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}-\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}=\frac{\omega^{2n+1}}{F_{2n+1}}-\frac{\omega^{2n+3}}{F_{2n+3}}$$
$$=\frac{\omega^{2n+1}}{F_{2n+1}}\left(1-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+3}}\omega^2\right).$$

因为 $0<\omega^2<1$，$0<\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+3}}<1$，所以上式右边大于 0，即证得

$$\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}>\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}.$$

类似地，由(6)式出发，可证

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}>\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}.$$

定理 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\omega.$

这定理的证明是不难的，只要在(4)式两边取极限，并利用 $\frac{\omega^{n+1}}{F_{n+1}}\to 0$，就能证得.

定理 2 和定理 3 说明，分数列

$$\frac{F_1}{F_2},\ \frac{F_2}{F_3},\ \frac{F_3}{F_4},\ \frac{F_4}{F_5},\ \cdots,\ \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}},\ \cdots$$

中，居于偶数位的分数所成的数列 $\left\{\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right\}$ 是单调上升的，以 ω 为极限；而居于奇数位的分数所成的数列 $\left\{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right\}$ 是单调下降的，以 ω 为极限(图 22)。



图 22

定理 4 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 恒位于两个相邻的分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 与 $\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 之间，而且更靠近后一个分数，即

$$\left|\omega-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|<\left|\frac{F_n}{F_{n+1}}-\omega\right|.$$

证明 因为任何相邻分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 及 $\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 总有一个处于数列 $\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$ 的奇数位，另一个则处于偶数位，由定理 3，ω 位于它们之间。又由定理 1，知

$$\left|\frac{F_n}{F_{n+1}}-\omega\right|=\frac{\omega^{n+1}}{F_{n+1}},$$

$$\left|\omega-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|=\frac{\omega^{n+2}}{F_{n+2}}.$$

而 $$\frac{\omega^{n+1}}{F_{n+1}}-\frac{\omega^{n+2}}{F_{n+2}}=\frac{\omega^{n+1}}{F_{n+1}}\left(1-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\omega\right)>0,$$

所以 $$\left|\frac{F_n}{F_{n+1}}-\omega\right|>\left|\omega-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|.$$

定理 5 在所有分母小于或等于 F_{n+1} 的分数中，以

$\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 最接近 ω.

证明 可以采用反证法. 设 $\dfrac{a}{b}(b\leqslant F_{n+1})$ 比 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 更靠近 ω, 即

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|<\left|\frac{F_n}{F_{n+1}}-\omega\right|.$$

因为
$$\left|\frac{a}{b}-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|=\left|\frac{a}{b}-\omega+\omega-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{a}{b}-\omega\right|+\left|\omega-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|$$
$$<\left|\frac{F_n}{F_{n+1}}-\omega\right|+\left|\omega-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|.$$

由定理 3, ω 位于 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 与 $\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 之间,所以不等式右边等于 $\left|\dfrac{F_n}{F_{n+1}}-\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right|$, 再由前面的推论 1, 它又等于 $\dfrac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$, 所以

$$\frac{|aF_{n+2}-bF_{n+1}|}{bF_{n+2}}<\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}},$$
$$\frac{|aF_{n+2}-bF_{n+1}|}{b}<\frac{1}{F_{n+1}},$$
$$|aF_{n+2}-bF_{n+1}|<\frac{b}{F_{n+1}},$$

又因为
$$b\leqslant F_{n+1},$$
所以
$$|aF_{n+2}-bF_{n+1}|<1.$$
而左边为一非负整数,所以
$$aF_{n+2}-bF_{n+1}=0,$$
或
$$\frac{a}{b}=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

再由推论 2, $\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 是既约分数, 所以 $b=F_{n+2}>F_{n+1}$, 这与

所设条件 $b \leqslant F_{n+1}$ 矛盾.

定理 5 完全解决了关于离散的量的黄金分割问题，即找到了一串分数列 $\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$，它以黄金数 ω 为极限，而且 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 是所有分母小于或等于 F_{n+1} 的分数中最接近于 ω 的. 由于这个性质，数学上把分数列 $\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$ 叫做黄金数 ω 的最佳渐近分数列.

更有趣的是，把 $F_n(n>2)$ 个物体分成两堆，使大堆物体数为 F_{n-1}，小堆物体数为 F_{n-2}，这样分法是最接近于黄金分割的. 例如，把 21 个物体分成 13 个和 8 个两堆是最接近于黄金分割的.

下面简单地介绍 F–数列与优选法的关系.

由于 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 是黄金数 ω 的最佳渐近分数，这就提供了在优选法中，用分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 代替 0.618 的可能性，并且定理 1 还给出了分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 与黄金数 ω 之间的误差估计

$$\left|\frac{F_n}{F_{n+1}}-\omega\right|=\frac{\omega^{n+1}}{F_{n+1}}.$$

例如，当 $n=9$ 时，

$$\left|\frac{F_9}{F_{10}}-\omega\right|=\left|\frac{34}{55}-\omega\right|=\frac{\omega^{10}}{F_{10}}=\frac{\omega^{10}}{55}\approx 0.0001.$$

例如，对某种产品要在 29°～50° 的范围内进行优选，因为中间试验点有 20 $(=F_8-1)$ 个，因此选用分数 $\frac{F_7}{F_8}=\frac{13}{21}$ 和 $\frac{F_6}{F_8}=\frac{8}{21}$ 分别代替 0.618 和 0.382. 第一个试验点定在 $\frac{13}{21}$ 处，即 $29+21\times\frac{13}{21}=42°$ 处，第二个试验点定在 $\frac{13}{21}$ 的对称

点 $\frac{8}{21}$ 处，即 $29+21\times\frac{8}{21}=37°$，比较两次试验的结果，若点①好(图 23)，则与 0.618 方法一样，去掉坏点②的一头——29° 到 37° 一段．第三次试验点安排在剩下范围内 $\frac{13}{21}$ 的对称点 $\frac{16}{21}$，即 45° 处，比较①，③两点的结果，若①好，去掉坏点③的一头——45° 到 50°．然后在剩下范围 $\frac{13}{21}$ 的对称点 $\frac{11}{21}$ 处，即在 40° 处作第四次试验．再比较①，④的结果，若点④好，又去掉坏点①的一头——42° 到 45°，在剩下范围内 $\frac{11}{21}$ 的对称点 $\frac{10}{21}$ 处，即在 39° 处作第五次试验，再选择点④及⑤中的好点，于是就在误差不超过 ±1° 的范围内确定了最佳点．

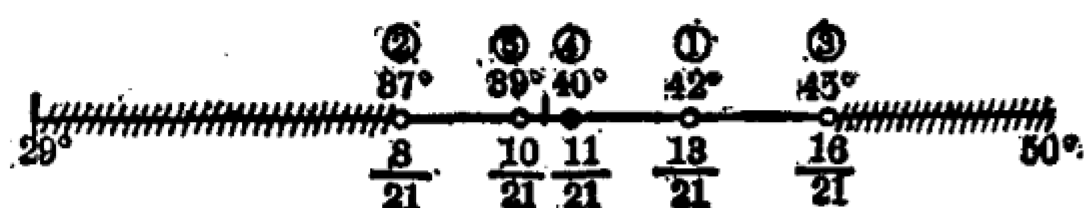


图 23

最后，我们用一个有趣的几何伪证来结束关于 F-数列的讨论．

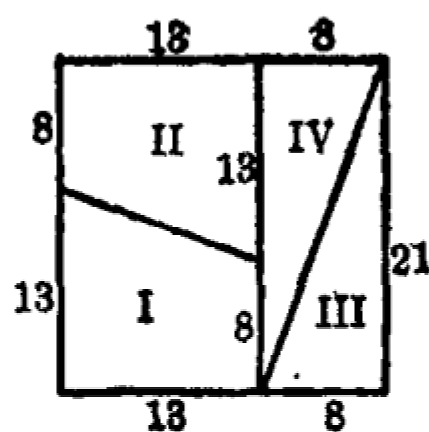


图 24

"441＝442"！

证明 如图 24，将边长为 21 的正方形分成 I、II、III、IV 四块，再把 I、III 和 II、IV 两块按图 25 拼成两个全等的直角三角形，它们合起来成一矩形．原来正方形面积为 $21^2=441$，矩形面积为 $13\times34=442$，所以

$$441=442.$$

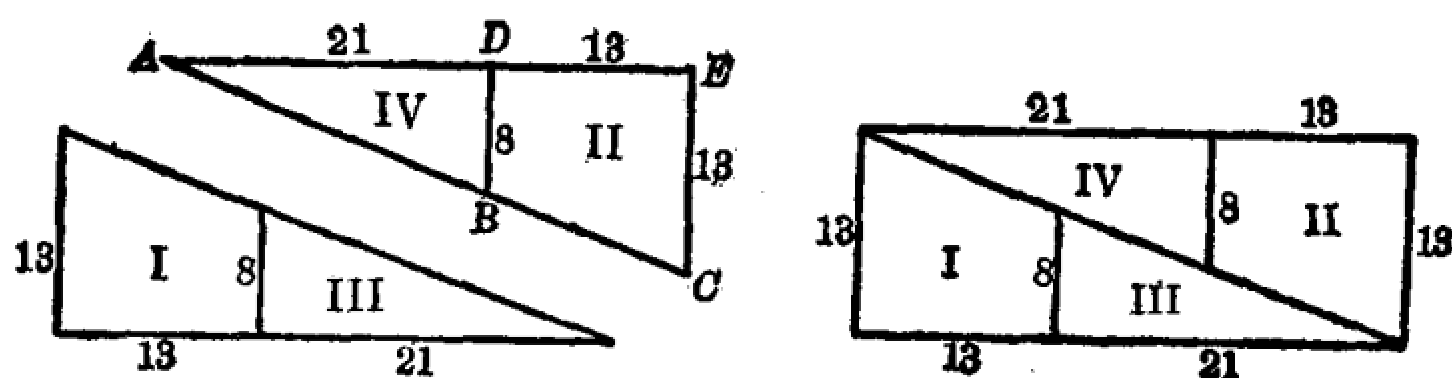


图 25

这个证明错在什么地方呢？仔细分析一下，可以发现，在上面"证明"中，对于 I、III 和 II、IV 两块可以拼成全等的直角三角形，这一点并未加以论证．事实上，图 25 中的 A、B、C 三点并不共线，因为

$$\text{tg}\angle ABD=\frac{21}{8}=2.625,\quad \text{tg}\angle BCE=\frac{13}{5}=2.6,$$

由于两者相差不大，就不易察觉．又因为

$$\text{tg}\angle ABD>\text{tg}\angle BCE,$$

于是 II、IV 两块拼成的是凹四边形．同样，I、III 两块拼成的也是凹四边形 (图 26)．所以，用 I、II、III、IV 四块拼出来的，是中间空了一块狭长的平行四边形的长方形，这块小平行四边形的面积为 1．

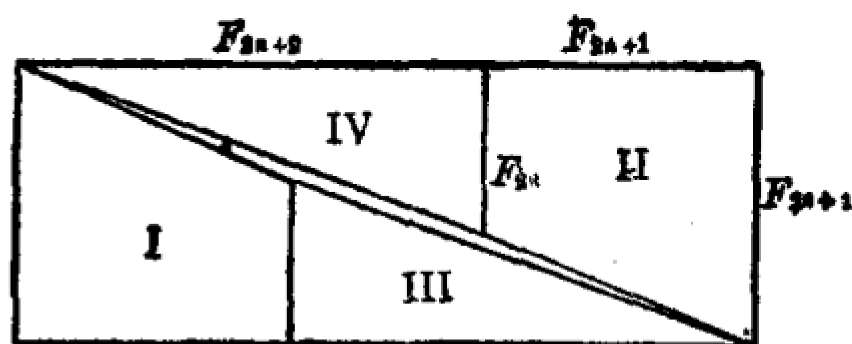


图 26

图 24 中，8、13、21 正是 F-数列里 F_6、F_7、F_8 这三项的数字．一般地，F-数列里任意三个连续数 F_{2n}、F_{2n+1}、F_{2n+2}，把一个边长为 F_{2n+2} 的正方形象图 24 那样地分成四块，这四块也拼成一个中间空了一块平行四边形的长方形，这个长方形的边长分别为 F_{2n+1} 和 F_{2n+3} (图 26)，由性质 7 可知，空出的平行四边形面积为

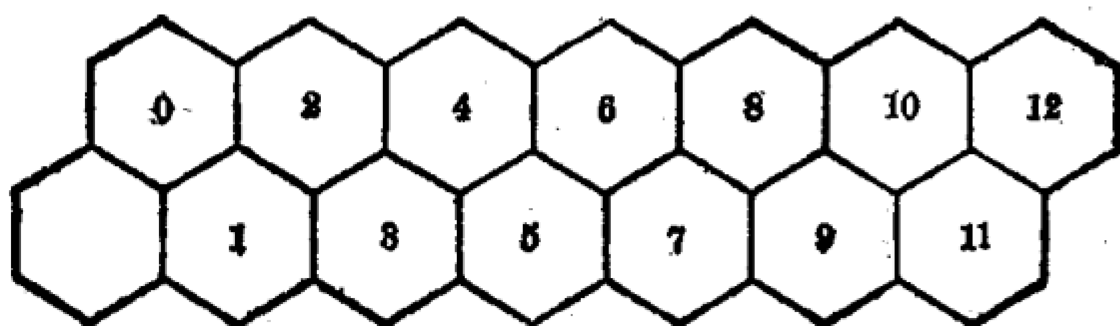
$$F_{2n+1}F_{2n+3}-F_{2n+2}^2=1.$$

下标 n 越大，这块平行四边形越狭长，因而更不容易察觉.

数学上有许多有趣的伪证，其伪就在于其中有某种不易察觉的谬误，易被人们“想当然”地忽略过去．因此，对各种问题或论证，一定要从多方面去深思，不要犯“想当然”的毛病.

练 习 题 二

1．有如图所示的一排蜂房，设蜜蜂只从一间蜂房爬到右边相邻的蜂房(如蜜蜂在 1 号房时，它只向 2 号或 3 号房爬)．问一只蜜蜂从图中未标号的那间房爬到第 n 号房有多少种不同的路线.



(第 1 题图)

2．设 $a+b=1$, $ab=-1$, 证明

$$u_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

是 F-数列.

3．设 n 被 m 整除，证明 F_n 也被 F_m 整除.

4．任给一正整数 m，证明在前 m^2 个 F-数 (即 F_1, F_2, …, F_{2m}) 中至少有一个能被 m 整除，而且在 F-数列当中有无穷多个 F-数能被 m 整除.

5．证明斐波那契数与二项式系数满足公式

$$C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]}=F_{n+1}.\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

这里约定 $C_0^0=1$, $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数.

6．设有一个无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$，其中 a_n 是第 n 个 F-数 F_n 的末位数，试证明这是一个循环小数.

三、格点正多边形

1. 不存在格点正五边形

我们平常作图用的方格坐标纸，方格是由两组互相垂直的平行线构成的，并且相邻的平行线之间的距离相等，我们把方格纸上纵线与横线的交点叫做格点．如果取一个格点作为坐标原点，通过这个格点的横向和纵向两直线分别作为 x 轴和 y 轴，并设方格的边长为 1，这样建立坐标系后，格点就是坐标系里横坐标和纵坐标都是整数的点．所以格点又叫整点．用格点做顶点，可以作出许多直线形，如正方形、矩形、平行四边形、梯形等等．现在要问：能不能在一张方格纸上作出一个正五边形，使它的各个顶点都是格点？答案是否定的．

我们先证明一个简单的事实．

引理 1　任何两个格点的距离的平方都是整数．

证明　如图 27，在直角坐标系里，设有两个格点：

$$A(x_1,\ y_1)、B(x_2,\ y_2),$$

其中 x_1、y_1、x_2、y_2 都为整数．由两点距离公式

$$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

根据所设条件，x_1-x_2、y_1-y_2 都是整数，所以 AB^2 为整数．

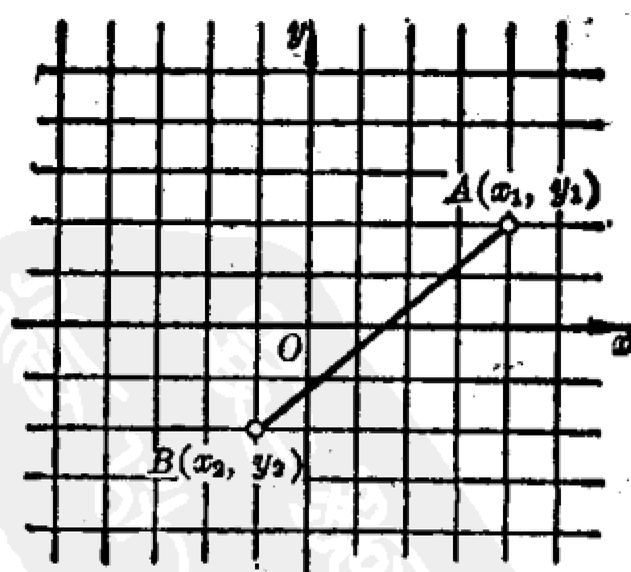


图 27

下面用反证法证明不存在格点正五边形．

假设存在格点正五边形，其边长为 a，对角线长为 l，在第一节第 4 小节中已指出

$$\frac{a}{l}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

所以

$$\frac{a^2}{l^2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

根据引理 1，a^2 和 l^2 都是整数，那末 $\frac{a^2}{l^2}$ 是一有理数. 现在 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 却是一无理数，所以 $\frac{a^2}{l^2}$ 是一无理数，与引理 1 相矛盾，这就证得格点正五边形是不存在的.

2. 推　　广

上面我们证明了不存在格点正五边形，由此可知格点正十边形，格点正二十边形……，一般地，格点正 $2^m\cdot5$（m 为正整数）边形不存在. 对此，可以证明如下：

证明　用反证法. 如果有一个格点正 $2^m\cdot5$ 边形，我们从它的某一顶点开始，每隔一点作一条对角线，就得到一个格点正 $2^{m-1}\cdot5$ 边形，对这个格点正 $2^{m-1}\cdot5$ 边形，采用上面类似的作法，就得到格点正 $2^{m-2}\cdot5$ 边形，连续地进行 m 次，最后得到一格点正五边形，而格点正五边形不存在，这就说明格点正 $2^m\cdot5$ 边形不存在.

那么，究竟当 n 是多少时，格点正 n 边形存在呢？

很明显，格点正四边形是可以作出的. 并且，可以作出几种，其中正四边形的边有的和纵、横线重合，有的不重合（图 28）.

除格点正四边形外，是否还有别的格点正 n 边形呢？我

们说，没有了．下面分几种情况来证明这个结论．

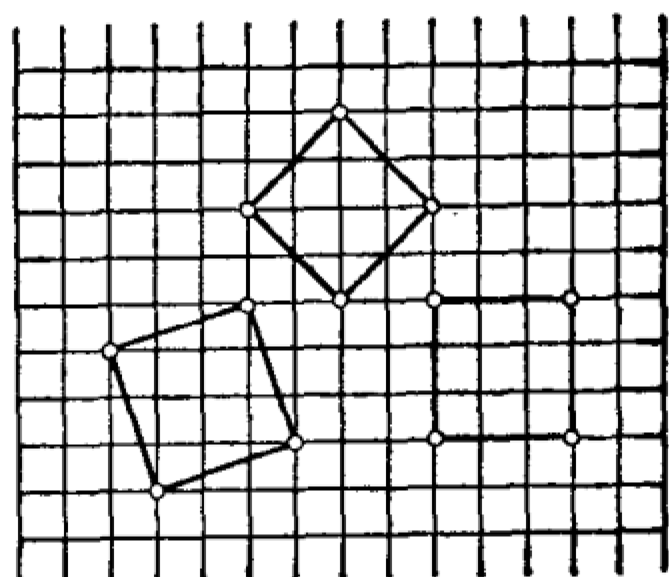


图 28

当 $n=5$ 时，格点正五边形不存在，这在前面已讨论了．当 $n=3$ 时格点正三边形不存在，我们留作习题，请读者自己证明．并且，由此立即得出格点正 $2^m\cdot 3$（m 为正整数）边形不存在，特别地，格点正六边形不存在．

现在我们来证明，对于 $n\geqslant 7$，格点正 n 边形不存在．

用反证法证明．假设存在 $n\geqslant 7$ 的格点正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，见图 29(1)．在方格纸上再取一格点 O_1，从 O_1 出发，作线段 $O_1B_1 \mathrel{\underline{\parallel}} A_1A_2$，$O_1B_2 \mathrel{\underline{\parallel}} A_2A_3$，…，$O_1B_n \mathrel{\underline{\parallel}} A_nA_1$．因 A_1，A_2，…，A_n 都是格点，所以 B_1，B_2，…，B_n 也是格点．容易证明 $B_1B_2\cdots B_n$ 是一个正 n 边形，见图 29(2)．所以它仍是一个格点正 n 边形．设原来的格点正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 a，由作法可知 $O_1B_n=a$．作 $O_1C\perp B_nB_{n-1}$，在直角 $\triangle O_1B_nC$ 中，$\angle B_nO_1C=\dfrac{\pi}{n}$，所以

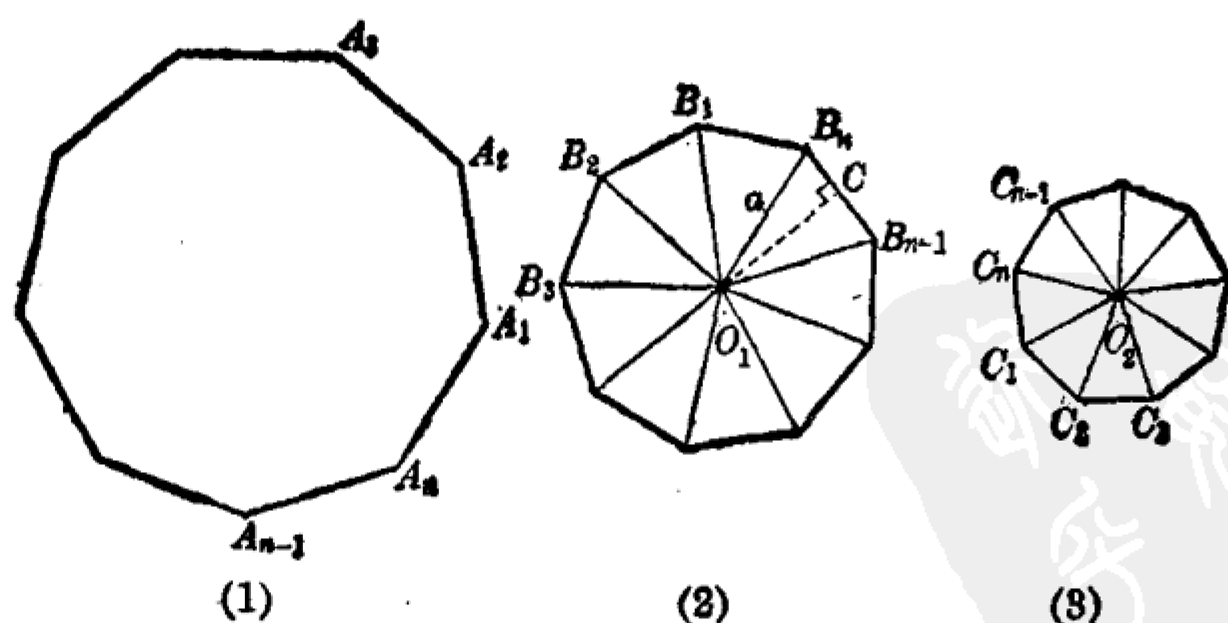


图 29

$$B_nC = a\sin\frac{\pi}{n}.$$

所以，求得格点正 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的边长为

$$2a\sin\frac{\pi}{n}.$$

它是原来格点正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 边长的 $2\sin\frac{\pi}{n}$ 倍. 如果按上述方法继续作图，取格点 O_2，从 O_2 出发，作 $O_2C_1 \perp\!\!\!= B_1B_2$，$O_2C_2 \perp\!\!\!= B_2B_3$，…，$O_2C_n \perp\!\!\!= B_nB_1$，又得到一个格点正 n 边形 $C_1C_2\cdots C_n$，见图 29(3)，其边长为

$$\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 a.$$

如果按上述方法作图 k 次，那末得到的格点正 n 边形的边长为

$$\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^k a.$$

根据题设条件 $n\geqslant 7$，$\frac{\pi}{n}$ 的度数为

$$\frac{180^\circ}{n} < \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ,$$

所以
$$\sin\frac{\pi}{n} < \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

即
$$2\sin\frac{\pi}{n} < 1.$$

当 $k\to\infty$ 时，$\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^k a\to 0$. 这就表明，当作图次数 k 足够大时，能使 $\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^k a<1$，这样就导致存在边长小于 1 的格点正 n 边形，这显然是不可能的，这就证明了：当 $n\geqslant 7$ 时，格点正 n 边形不存在.

3. $\cos\theta$ 何时为有理数

我们知道，有一些特殊角的余弦值是有理数，如

$$\cos 0=1,\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\ \cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},$$

等等. 由于余弦能取 -1 到 $+1$ 的所有值，因此可以肯定，除了这些特殊角以外，还有许多 θ 值能使 $\cos\theta$ 为有理数. 那么，究竟是怎样的一些 θ 值，才能使 $\cos\theta$ 为有理数呢？这个问题和我们在前面讨论的格点正 n 边形问题很有关系. 这里就先讨论这个问题，然后再从另一个角度给出格点正 n 边形问题的另一个证明.

先证明两个引理.

引理 2 设 n 为正整数，则 $\cos n\theta$ 可仅用 $\cos\theta$ 表示. 具体地说，有

$$2\cos n\theta=P(2\cos\theta), \tag{1}$$

其中 $P(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次整系数多项式

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-4}+\cdots. \quad (a_1、a_2、\cdots \text{为整数})$$

证明 用归纳法证明.

(1) 当 $n=1$ 时，因 $2\cos\theta=2\cos\theta$，也就是说，此时 $P(x)=x$，所以(1)式成立.

当 $n=2$ 时，因 $2\cos 2\theta=2(2\cos^2\theta-1)=(2\cos\theta)^2-2$，此时 $P(x)=x^2-2$，则 $2\cos 2\theta=P(2\cos\theta)$，所以(1)式亦成立.

(2) 假设当 $n=k-1$、$n=k-2$ 时，(1)式成立，即有

$$2\cos(k-1)\theta=(2\cos\theta)^{k-1}+b_1(2\cos\theta)^{k-3}+b_2(2\cos\theta)^{k-5}+\cdots,$$

$$2\cos(k-2)\theta=(2\cos\theta)^{k-2}+c_1(2\cos\theta)^{k-4}+\cdots,$$

其中 b_1、b_2、…，c_1、c_2、… 都是整数．那末，当 $n=k$ 时，

$$\cos k\theta+\cos(k-2)\theta=2\cos(k-1)\theta\cos\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}2\cos k\theta&=[2\cos(k-1)\theta](2\cos\theta)-2\cos(k-2)\theta\\&=[(2\cos\theta)^{k-1}+b_1(2\cos\theta)^{k-3}\\&\quad+b_2(2\cos\theta)^{k-5}+\cdots](2\cos\theta)\\&\quad-[(2\cos\theta)^{k-2}+c_1(2\cos\theta)^{k-4}+\cdots]\\&=(2\cos\theta)^k+(b_1-1)(2\cos\theta)^{k-2}\\&\quad+(b_2-c_1)(2\cos\theta)^{k-4}+\cdots.\end{aligned}$$

令 $b_1-1=a_1$，$b_2-c_1=a_2$，…，则

$$2\cos k\theta=(2\cos\theta)^k+a_1(2\cos\theta)^{k-2}+a_2(2\cos\theta)^{k-4}+\cdots.$$

因 b_1、b_2、…，c_1、… 是整数，所以 a_1、a_2、… 也是整数，即证得(1)式在 $n=k$ 时也成立.

根据 (1)、(2)，这就证得了对于一切自然数 n，(1) 式是成立的.

(1)式也可以写成:

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_1(2\cos\theta)^{k-2}+a_2(2\cos\theta)^{n-4}+\cdots.$$

引理 3 设 $P(x)$是首项系数为 1 的整系数多项式，即

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 a_1、a_2、…、a_n 为整数，则方程 $P(x)=0$ 的所有有理根为整数.

证明 采用反证法．设有理数 $\frac{b}{c}(c\neq1)$ 为 $P(x)$ 的根，而且 b、c 互质，于是

$$P\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{b^n}{c^n}+a_1\frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}+a_2\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{b}{c}+a_n=0.$$

两边乘以 c^{n-1}，并移项，得

$$\frac{b^n}{c}=-a_1b^{n-1}-a_2b^{n-2}c-\cdots-a_{n-1}bc^{n-2}-a_nc^{n-1}.$$

因 b、c 互质，所以 b^n 与 c 也互质，所以上式左边是一不可约分数，而右边为一整数，这是不可能的．即证得：不可约分数不可能是 $P(x)$的根，也就是说，$P(x)$的有理根只可能是整数．

定理 设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta$ 为有理数，那末或者 $\theta=\frac{\pi}{3}$，或者 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数．

证明 采用反证法．设 $\frac{\theta}{\pi}$ 为有理数，令

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{m}{n},\quad \theta=\frac{m}{n}\pi,$$

将 $\theta=\frac{m}{n}\pi$ 代入

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_1(2\cos\theta)^{n-2}+\cdots,$$

得

$$\left(2\cos\frac{m\pi}{n}\right)^n+a_1\left(2\cos\frac{m\pi}{n}\right)^{n-2}+\cdots$$
$$=2\cos m\pi=2(-1)^m,$$

或

$$\left(2\cos\frac{m\pi}{n}\right)^n+a_1\left(2\cos\frac{m\pi}{n}\right)^{n-2}+\cdots-2(-1)^m=0.$$

即 $2\cos\frac{m\pi}{n}$ 是一首项系数为 1 的整系数多项式的根．若 $2\cos\frac{m\pi}{n}$ 为有理数，则由引理 2，它只能是整数．因为

$$-2\leqslant 2\cos\frac{m\pi}{n}\leqslant 2,$$

所以

$$2\cos\frac{m\pi}{n}=\begin{cases}0,\\ \pm1,\\ \pm2.\end{cases}$$

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\begin{cases}0,\\ \pm\frac{1}{2},\\ \pm 1.\end{cases}$$

由题设条件 $0<\frac{m\pi}{n}<\frac{\pi}{2}$，所以只可能有

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\frac{1}{2},\quad \theta=\frac{m\pi}{n}=\frac{\pi}{3}.$$

即证得：当 $\frac{\theta}{\pi}$ 为有理数，且 $\cos\theta$ 也是有理数时，$\theta=\frac{\pi}{3}$. 也就是说，当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，若 $\cos\theta$ 为有理数，则或者 $\theta=\frac{\pi}{3}$，或者 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数.

推论 设 n 为自然数，且 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 为有理数，则 $n=1$、2、3、4、6.

证明 当 $n>4$ 时，$0<\frac{2\pi}{n}<\frac{\pi}{2}$，又由题设条件 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 为有理数，所以必有

$$\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{3},$$

$$n=6.$$

而当 $n=1$、2、3、4 时，$\cos\frac{2\pi}{n}$ 显然是有理数.

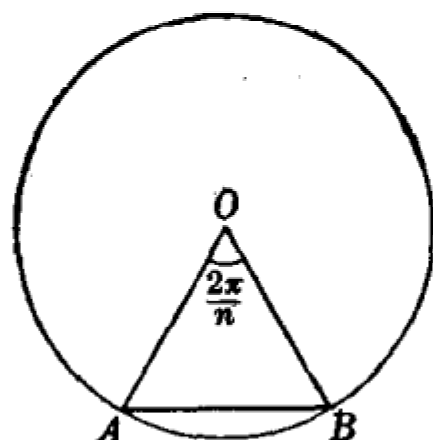


图 30

利用这个推论，可以直接确定：可能存在哪几种格点正多边形.

如图 30，设 AB 是格点正 n 边形的一边，O 为其中心. 不妨设 O 点也是格点（否则，依第 2 节的方法，可重作一格点正多边形，使中心 O 也是格点）. 于

是 AB^2、OA^2、OB^2 都是整数. 因为 $\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$, 由余弦定理

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\frac{2\pi}{n},$$

得

$$\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{2OA^2-AB^2}{2OA^2}.$$

所以 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 为有理数. 又因为多边形的边数必须 $n\geqslant 3$, 由上述推论, 即可知

$$n=\begin{cases}3,\\4,\\6.\end{cases}$$

这就是说, 格点正 n 边形只可能在 $n=3$、4、6 时存在. 而格点正三边形及格点正六边形不存在是很容易证明的, 于是可知只存在格点正四边形.

练习题三

1. 证明不存在格点正三角形.

2. 设有一非正方形的格点菱形, θ 为其一锐角, 证明 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数.

3. 设一直角三角形的边长为整数, θ 为其一锐角, 证明 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数.

4. 设 $\triangle ABC$ 三边之长为整数, θ 为其任一角, 则或者 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数, 或者 θ 等于 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 及 $\frac{2\pi}{3}$.

5．设 p 为大于 1 的奇数，$\theta=\arccos\frac{1}{p}$，证明 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数．

［提示：利用公式

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$$

$$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots$$

进行证明．这个公式是将棣莫佛 (Abraham de Moivre)公式

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

的右边用二项式定理展开得到的．］

四、正五边形和正十二面体

如果多面体的各个面都是全等的正多边形，并且各个多面角相等，这样的多面体叫做正多面体．正多面体一共只有五种*)：其中每面都是正三角形的有三种——正四面体，正八面体和正十二面体；每面都是正方形的一种——正六面体（立方体）；每面都是正五边形的一种——正十二面体（图 31）．

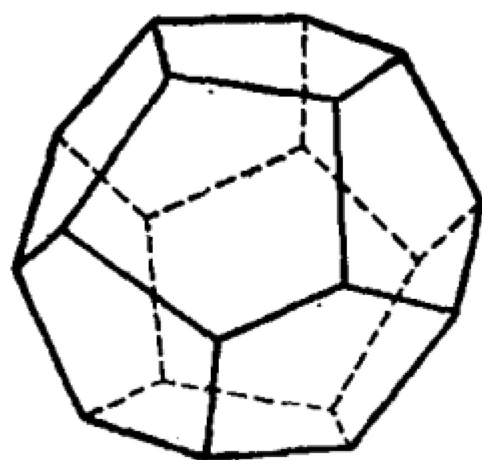
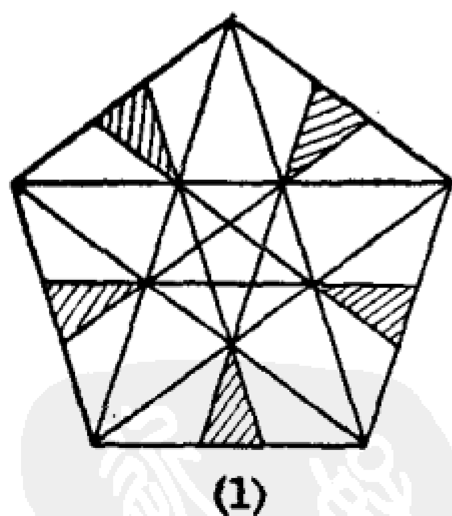


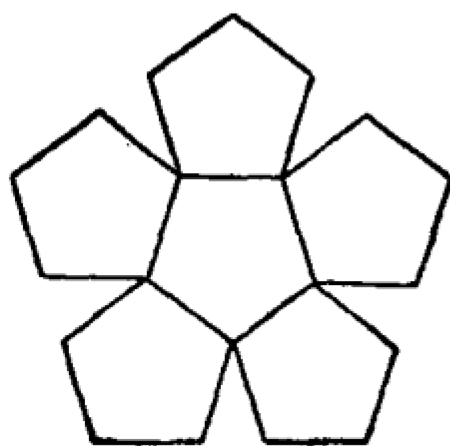
图 31

1. 造　　型

用一张硬纸片，剪出一个正五边形，作出它的五条对角线；再作出内部正五边形的五条对角线，并延长到原正五边形



(1)



(2)

图 32

*) 参看江泽涵著：《多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类》或段学复著：《对称》。

的边，见图 32(1)；然后剪去中间带阴影的五个小三角形，就得到一个象梅花形状的图案，见图 32(2)．我们用硬纸板按照这样的方法做好两块同样大小的梅花形图案．再用小刀沿着每块中间的正五边形的周界，划上一道口子，使其便于翻动．然后把两块纸板交叉迭置，对称地放好，并使刀口一个向桌面，一个朝上面．最后用一个橡皮筋圈，沿着它们周围的角，一上一下交错地套紧(图 33)，再慢慢松开按在上面的手，我们就看到，在橡皮筋收缩下，模型逐渐鼓起，直到完全合拢成为一个完整的正十二面体，见图 34 和 35．

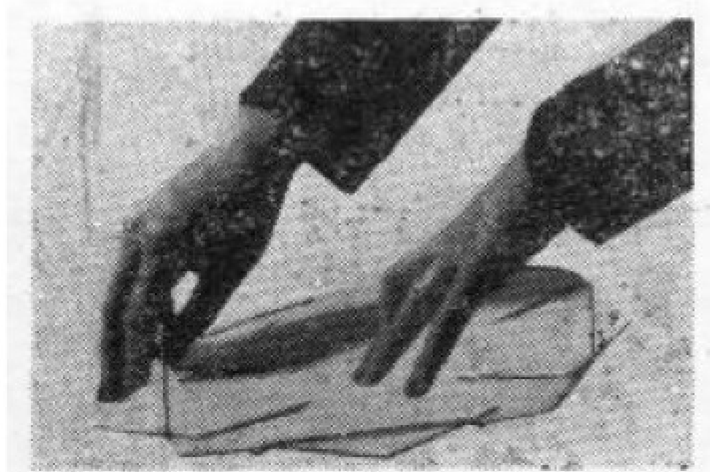


图 33

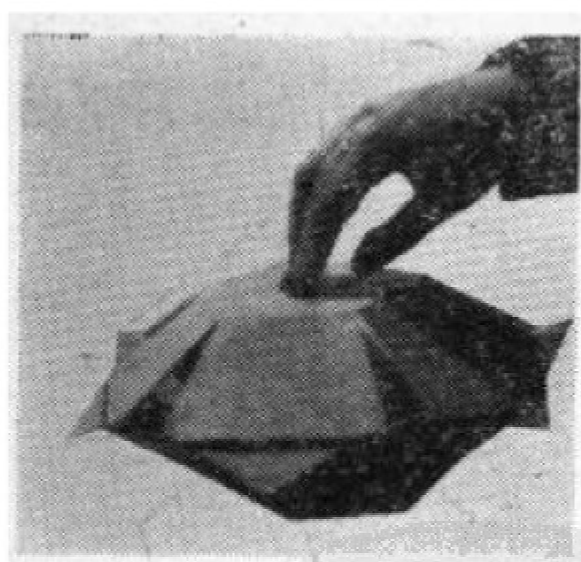


图 34

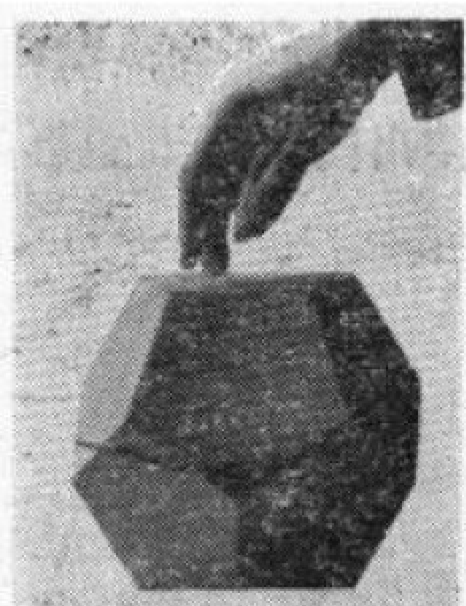


图 35

正十二面体有 12 个面，20 个顶点，30 条棱，对于不熟悉正十二面体的读者，建议按上面的方法，制作一个模型，取得一些感性知识后再阅读以下内容．

2. 涂　色

现在，把正十二面体的各个面都涂上颜色，使任何相邻的两个面都有不同的颜色．显然，使用的颜色越多，越容易达到要求，用一种颜色肯定不能达到要求．我们自然要问：至少要用几种颜色去涂色，才能使任何相邻的两个面有不同的颜色？答案是：需要而且只要四种颜色就够了．为了肯定这个结论，现在来说明用三种颜色不够，并指出用四种颜色去涂色的具体做法．

由于正十二面体是一个立体图形，说明起来比较麻烦，我们设法用一个平面图形来代替正十二面体的十二个面，再进行讨论．先设想有一个薄橡皮围成的正十二面体，在它的某一个面内打一个洞，然后从这个洞将正十二面体的表面向外撑开，摊成一个平面图形，并且不让表面破裂，也不使起皱纹．这样，正十二面体上的30条棱，就成了平面上的30条相交曲线网，并且原来的面、棱、顶点之间的衔接关系不变．为了方便起见，我们把曲线网画成规则的直线形，原来未打洞的十一个面都各是平面上的一个五边形，而被打洞的那面则成了一

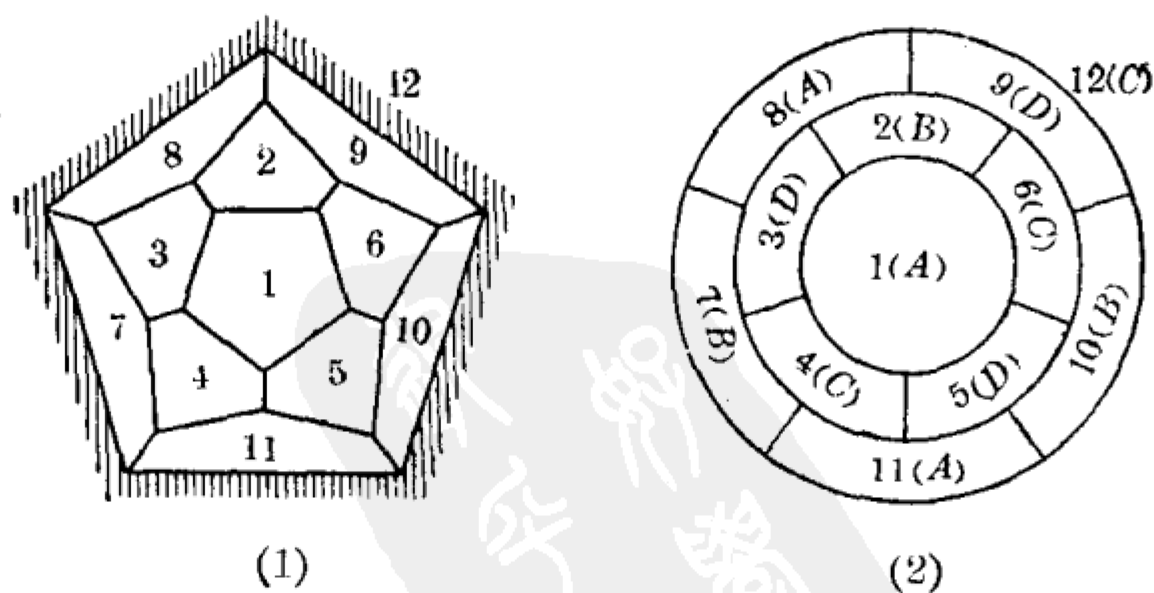


图　36

个平面五边形的外部，见图36(1)的阴影线部分．或更简单地可以画成图36(2)所示的图形．现在将12个面分别用1到12这十二个数字标号．这样1号和12号表示正十二面体的两平行相对的面．于是，正十二面体的涂色问题，就可以在这样的平面图上讨论了．

假如只用A、B、C三种颜色来涂，设1号面涂的是A色，考虑与1号面相邻的2～6号五个面，为了使相邻的面颜色不同，2号面应用B色或C色，设为B色，而与2号面相邻的3号及6号面就只能用C色，于是4号及5号面就无法涂色了．这就是说，只用三色来涂是不够的．

图36(2)给出了一种用A、B、C、D四色，而且相邻两面有不同颜色的具体涂法．

下面对这个问题作更深入的讨论．首先约定：如果通过正十二面体的一个旋转，可以把两种涂色方法的同色面完全重合，那末就把这两种涂色方法看成是相同的．可以证明，在这个规定下，用四色去涂正十二面体只有四种不同的涂色方法．

证明分三步进行．

1．首先证明对任何涂法，每种颜色都恰好使用三次．

可用反证法．假设某色B使用次数少于3次，那末必存在一种颜色A使用次数多于3次．不妨设图36中1号面涂色A，那末与1号相邻的2～6号五个面就不能涂A，因此余下的六个面(7～12号)至少涂3次A色．如果12号面涂A，7～11号五个面就不能涂A，这样A就只涂了二次；如果12号面不涂A，则7～11号五个面就至少要涂3次A，这也不可能，所以假设是错误的，这就证明了每种颜色都恰好使用三次．

在正十二面体的平面图中，我们把画在最中间的那个面叫做“前面”(图36中的1号面)，与“前面”平行相对的面叫做“后面”(如12号面)．把与前面相邻的五个面(2～6号)叫做第一环；与后面相邻的五个面(7～11号)叫第二环．从上述证明可见，用四色去涂正十二面体时，前面与后面的颜色必不相同，并且后面(12号)的颜色必是第一环2～6号使用过两次的颜色．

2．可以证明：如果第一环的五个面及后面的颜色已涂好，那末其余面的颜色也就唯一确定了．

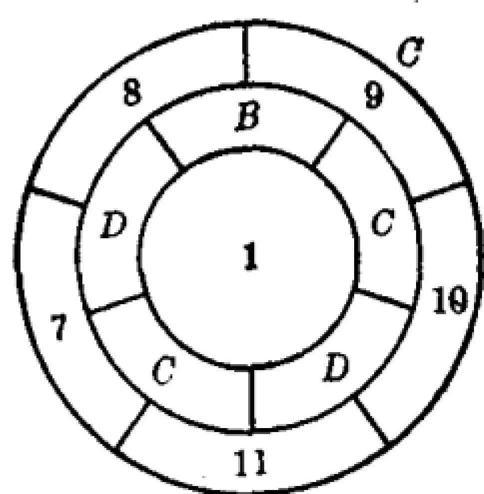


图 37

事实上，如图37所示的情况，1号面只能是 A 色，8号面也只能是 A 色．因而9号面必是 D 色，7号面只能是 B 色，11号面只能是 A 色，10号面只能是 B 色．

3．因为正十二面体的任意一个面都可以作为前面，我们不妨设前面(1号)已涂 A 色，于是第一环的五个面还有 B、C、D 三色可用．颜色分布情况一定是某色用一次，另两色各用二次．通过旋转，第一环的五个面中任意一个都可以看成2号，我们认定2号的颜色，使它不与另外四个面的颜色相重，所以2号的颜色有三种，其余四个面就只有两种．这样，对第一环的五个面就有六种不同的涂法，而后面的颜色又必须是第一环中使用了两次的颜色，所以对这六种涂法的每一种，后面又有两种不同的涂法．所以共有十二种不同的涂法(图38)．但是，用四色去涂正十二面体时，A 色面一定出现三次，当颜色涂好后，通过正十二面体的旋转，可使任一 A 色面成为前面，于是图38标出的涂法中，还可能有在约定的意义

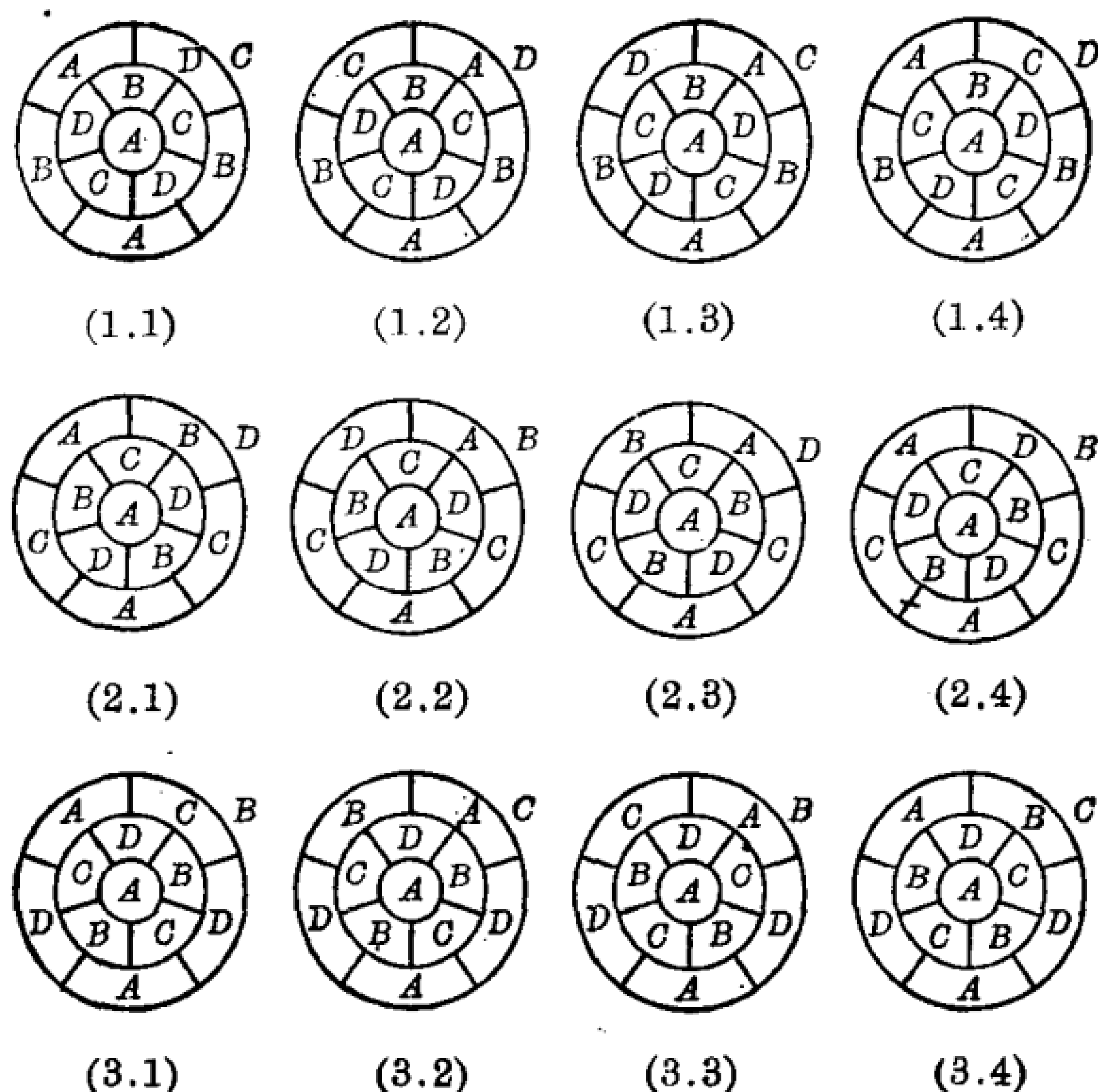


图 38

下相同的涂法．事实上，图 38 所示的方法中，第一行的四个涂法(1.1)，(1.2)，(1.3)，(1.4)是互不相同的，而第二行、第三行的涂法，可由第一行的涂法经过正十二面体的旋转而得．例如(2.1)和(3.1)所示的涂法可由(1.1)而得，其余类推．这就证得在约定的意义下用四色去涂正十二面体，涂色方法恰好只有四种．

上面讨论的正十二面体的涂色问题，可以用下面的方法引伸到球面上去．仍取一个薄橡皮制的正十二面体，如果设想把这个正十二面体拉成一个球面，原来在每个顶点相交的三条棱，成了在球面上相应点相交的三条球面曲线，正十二面体的十二个面也就变成球面上的十二块，每块由五条球而曲线围成，而且邻接关系不变．即原来是在某条棱相交的两个

正多边形，在球面上就是在相应曲线(由该棱变来)上相接的两块曲面．显然，这样的球面上的十二块，也可以用四种颜色着色，而使相邻面颜色不同．

3. 地图着色问题

假如把一个球面用该球面上的曲线划分成若干区域(上节末尾讨论的是一种特殊的情形)，并把这些区域涂上颜色，要求任何相邻的区域颜色不同，问最少需要几种颜色？仍设想球面是薄橡皮制的，并在某个区域内打一个洞，然后从这个洞将球面向外撑开，和上节对正十二面体的讨论类似，将得到一个平面图形(或者说是地图)．因而球面区域的着色问题，也就成了地图的着色问题，这是一个有名的难题．本来，给地图着色，要求邻国颜色不同，这是常识．地图学家们根据实践经验知道，给任何一张地图着色，要求邻国颜色不同，有四种颜色就足够了，而三种颜色是不够的，但又没有遇到过非五色不可的地图．当然，没有遇到过并不等于没有非五色不可的地图．

1852年，英国的喀斯里(F. Guthrie)在一封给德·摩尔根(De Morgan)的信中，在数学上正式提出这个问题：给一张任意的地图着色，要求邻国颜色不同，四种颜色够不够？德·摩尔根又将这个问题请教数学家哈密顿(Hamilton)，未能引起重视．过了二十六年，即1878年，英国数学家凯莱(Cayley)在伦敦数学年会上又提出这个问题，看来也未受到重视．以后，出现了一些错误的证明——起初认为是对的，以后又为人们否定，这才引起了不少数学家的重视，开展了对这个问题的研究．一百多年来，对四色问题的研究，推动了数学的一个分支——图论的发展，但问题本身耗费了许多数学家的精力，却

一直不能解决．人们既不能证明，对任何平面地图着色，四种颜色够了；也没人能找出一张平面地图，非用五种颜色着色不可．一个多世纪以来，四色猜想，就象哥德巴赫(Goldbach)猜想等著名数学难题一样，使人望而生畏．

1976 年，美国数学家阿皮尔 (K. Appel) 及海肯 (W. Haken)，借助于高速电子计算机，花了 1200 小时机器时间，作了一百多亿次逻辑判断，宣告四色猜想已予肯定，他们的证明已得到许多图论专家的承认．当然，四色问题的研究工作并未终结，如证明是否能化简？是否不用计算机也能证明？仍有待于人们进一步研究．

为了明确地图着色问题在数学上的提法，并给出五色定理的证明(即证明只用五种颜色便可以完成上述要求的地图着色，当然比四色定理的证明要容易得多)，我们先来介绍一些平面网络的知识．

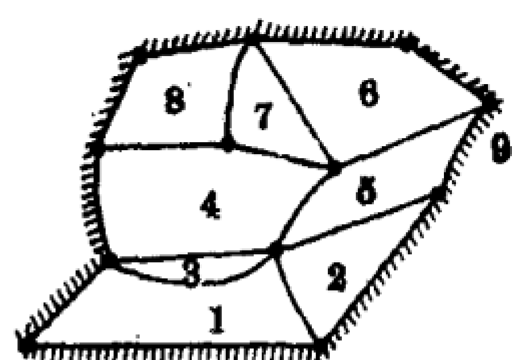


图 39

我们要讨论的平面网络是在同一个平面上由有限多个多边形拼成的象图 39 那样的“多边形图”，这些多边形叫做面，它们的边和顶点仍叫做多边形图的棱和顶点．为了醒目，图中的顶点都用黑点标出．这里说到的多边形，与通常的多边形不同，它的棱可以是曲线．如图 39 中面 1、2、3 分别是“四边形”、“三边形”和“二边形”．

其次，当我们用打洞的方法，把一个已划分成若干区域的薄橡皮球面摊成平面图的时候，被打洞的区域的边界就变成平面图上的最外围“边界”，而被打洞的区域相当于这个最外围边界的外部区域(图 39 中的阴影部分)，我们把这样的外部区域也看作是一个面，叫做“无限面”(图 39 中的面 9)．因

此，在计算一个平面网络的面数时，要把无限面也计算在内.

从图 39 可见，这种多边形图有这样一些特点：它的每两个顶点可以由它的一些棱所组成的“折线”连结起来，每个顶点处都至少集结着两条棱；每条棱连接着两个不同的顶点，它恰是两个面的公共棱，而两条棱的交点一定是顶点；面是由若干条棱所围成的多边形.

前面讲到的把球面划分成若干区域应满足这样的要求：当在它的某个区域内打一个洞而摊成的平面图，是按照上述规定的网络.

对于这样的网络，它的面数 f、棱数 e 和顶点数 v，有下面的关系

$$f+v-e=2.$$

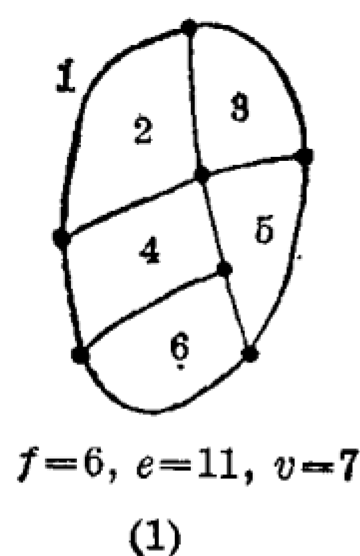
这个关系式叫做欧拉(Euler)公式.

对于图 40(1)、(2) 的两个网络，我们可以直接验证它们的面数、棱数和顶点数分别都符合欧拉公式. 即

$$6+7-11=2;$$

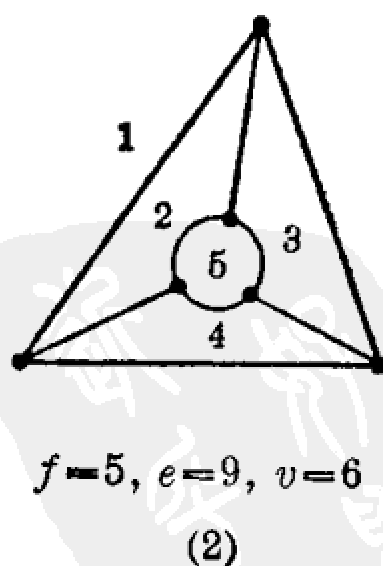
$$5+6-9=2.$$

欧拉公式的严格证明，可参看第 47 页脚注所引的两本书或 G. 盖莫夫 (Gamow) 著的《从一到无穷大》一书的中译本



$f=6,\ e=11,\ v=7$

(1)



$f=5,\ e=9,\ v=6$

(2)

图 40

第 42 页．这里只打算用归纳法，对欧拉公式作一个比较直观的推导．

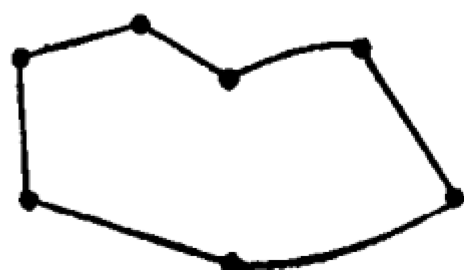


图 41

对面数 f 进行归纳．当只有一个 n 边形时(图 41)，这时

$$e=v=n,\ f=2.$$

所以公式成立．现假设公式对具有 f 个面的多边形图成立，来推出它对于具有 $f+1$ 个面的多边形图也成立．多边形图可以一步一步地构成，在每一步中，从“外面”添加一个面．假定 G (图 42 中的实线部分) 是一个有 v 个顶点、e 条棱和 f 个面，且数字 v、e、f 满足关系式．我们用画一条通过无限面，并且连结了 G 的最外围边界上的两个顶点的“折线”的办法，给 G 添上一个新面 (图 42 中的虚线)．如果这条折线上有 r 条棱，那末增加了 $r-1$ 个新顶点和一个新面．这时，由于

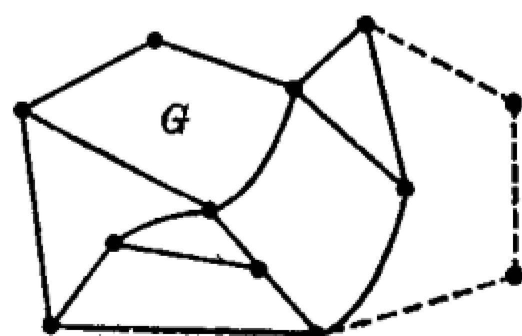
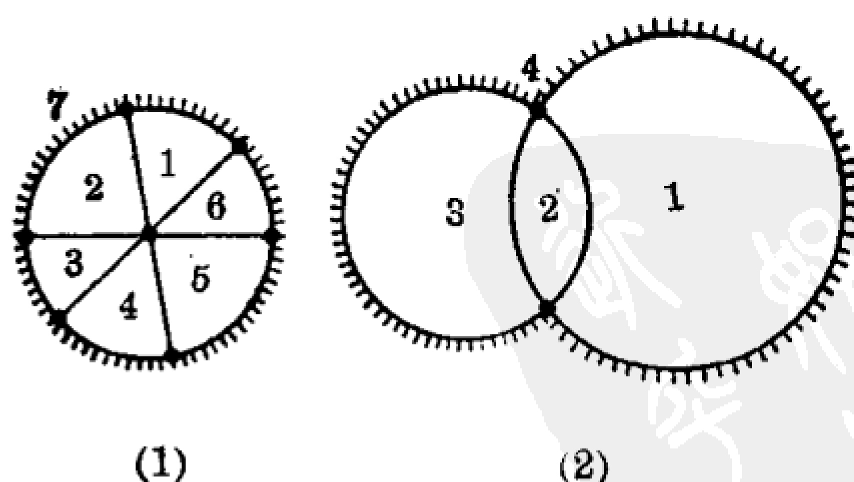


图 42

$$(v+r-1)+(f+1)-(e+r)=v+f-e=2,$$

所以公式仍成立．

作了上面的准备后，我们就可以讨论地图的着色问题了．首先，这里说到的地图就是多边形图．网络每一个面代表一



(1) (2)

图 43

个国家，所谓邻国，是指至少有一条棱做它们的公共边界的国家，而只有一点(或几点)相接触的国家，被认为是不相邻的，如图 43(1)中 1、3、5 及(2)1、3 都认为是不相邻的国家.

其次，当我们试图用尽可能少的颜色去为网络着色时，可以不必去考虑只有两条棱相会的顶点. 因为如果 A 是这样一个顶点(图 44)，我们可以把这两条棱当作一条棱而把顶点 A 取消，这样做不会改变着色的颜色.

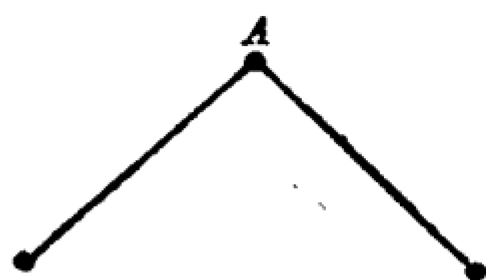


图 44

这样，我们讨论地图着色问题，就只要对每个顶点至少集结着三条棱的网络进行讨论就足够了.

我们把每个顶点都恰好集结着三条棱的网络，叫做**标准网络**. 例如图 45(2)的网络是标准网络，而图 45(1)的网络是非标准网络.

任何一个非标准网络的着色问题，一定能够化成标准网络的着色问题. 这是因为，假设有一非标准网络 S，在它的某个顶点 A 集结着三条以上的棱，包围 A 作一个充分小的圆，使它碰不到其他顶点，参见图 45(1). 这样，对网络 S 增加了一个面(即小圆面)，而小圆面也使网络 S 增加了一些新的棱和顶点，这些新的顶点的每个都只集结着三条棱. 对网络 S 的所有集结着三条以上棱的顶点都按上述方法处理，就

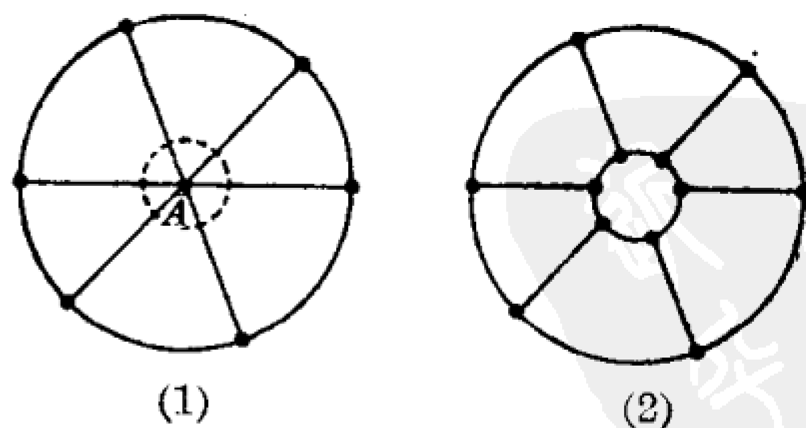


图 45

得到一个标准网络 S'，参见图 45(2)．对新网络 S' 的任何着色，则不用改变颜色，就可以产生原来网络 S 的一种着色，这只要把新增加的小圆面收缩成相应的顶点（例如 A）就可以了．

引理 平面上的任何标准网络中，至少含有一个面，其边界棱数不超过 5.

证明 设标准网络有 v 个顶点、e 条棱，因为每个顶点集结着三条棱，而每条棱连结着两个顶点．因此，有 $3v=2e$，或 $v=\frac{2}{3}e$．现在，用 f_i 表示网络的 f 个面中具有 i 条棱的面数，并用反证法来证明引理，假设每面的棱数都大于 5，则 $i\geqslant 6$，由于每条棱都出现在两个面中，所以

$$6f_6+7f_7+8f_8+\cdots=2e.$$

又因为
$$f_6+f_7+f_8+\cdots=f,$$

所以

$$6f=6(f_6+f_7+f_8+\cdots)\leqslant 6f_6+7f_7+8f_8+\cdots=2e,$$

$$f\leqslant\frac{1}{3}e.$$

于是，由欧拉公式可得

$$e+2=f+v\leqslant\frac{1}{3}e+\frac{2}{3}e=e.$$

即 $2\leqslant 0$，这是不可能的，因此引理得证．

五色定理 平面上的任何标准网络，都可用五色着色，而使相邻面颜色不同．

证明 对网络的面数 f 进行归纳．

当 $f\leqslant 5$ 时，由于面数最多是 5，显然可用五色着色，而使相邻面颜色不同，所以定理成立．

假设当 $f\leqslant k$ 时定理成立，也就是说，假设对面数不超过

k 的标准网络都可用五色着色，要证明 $f=k+1$ 时定理成立.

由引理，标准网络 S 中至少有一个面 σ，其棱数不超过 5，下面分几种情况讨论.

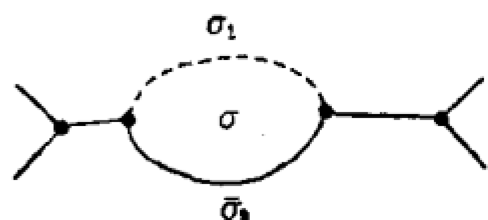


图 46

(1) σ 有两条棱(图 46). 因 σ 有两条棱，所以只有两个面 σ_1 及 σ_2 与它相邻，撤去原网络 S 中 σ_1 与 σ 的边界棱(图 46 中的虚线)，将 σ_1 与 σ 合成一个面 $\sigma'=\sigma+\sigma_1$，就得到一个只有 k 个面的标准网络 S'. 由归纳法假设，S' 可用五色着色. 设 σ'、σ_2 已用五色中的两色着色，现在恢复被撤去的棱，设 σ_1 着 σ' 的颜色，其余各面仍着已涂的颜色. 则 σ 有另外三色可用. 这就是说网络 S 可用五色着色.

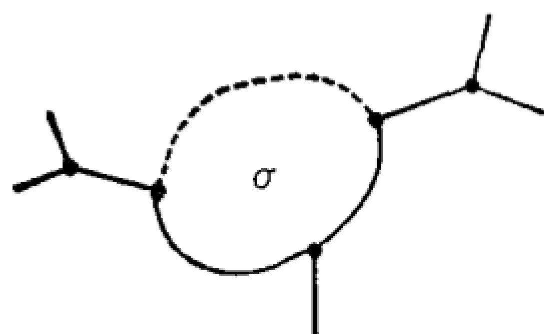


图 47

(2) σ 有三条棱(图 47)，与(1)类似，请读者自己研究.

(3) σ 有四条棱(图 48)：

这时，较(1)、(2)要复杂一些，因为图 49 画出的面 σ 的四个相邻面 σ_1、σ_2、σ_3 和 σ_4 中，可能有两个面，如 σ_2、σ_4 仅仅是同一个面的不同部分，如图 49(1)，也可能 σ_2、σ_4 有一条公共棱 mn，如图 49(2). 但不

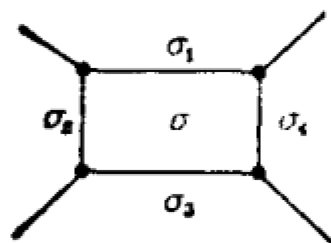
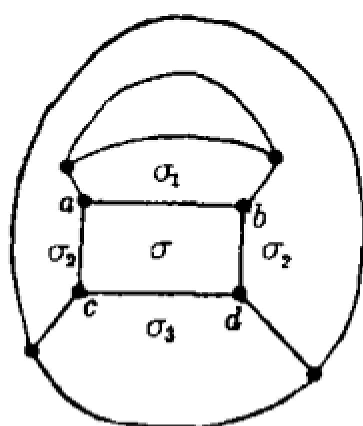
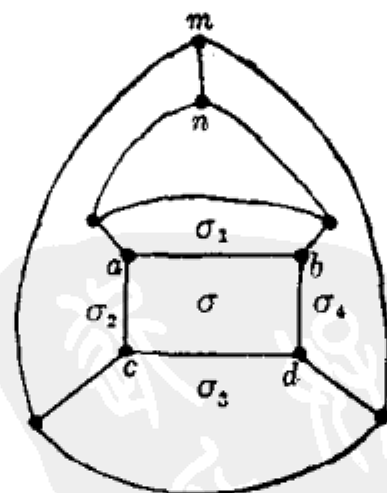


图 48



(1)



(2)

图 49

论发生上述哪种情况，面 σ_1 及 σ_3 是不相邻的．现在撤去棱 ab 及 cd，使 σ_1、σ 和 σ_3 合成一个面 $\sigma'=\sigma_1+\sigma+\sigma_3$，得到一新的标准网络 S'，S' 的面数已不超过 k，由归纳法假设，S' 可用五色着色，当恢复被撤去的两条棱时，让 σ_1 和 σ_3 仍着在用五色涂网络 S' 时 σ' 所用的颜色，其他各面颜色不变，这样，σ_1、σ_2、σ_3 和 σ_4 最多用了三色，因而面 σ 至少还有两色可用，即网络 S 可用五色着色．

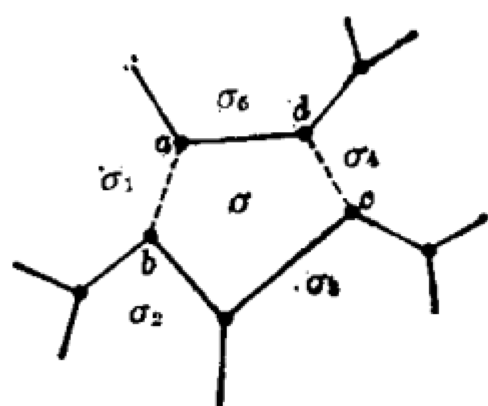


图　50

(4) σ 有五条棱(图 50)：

设 σ 的五个相邻面是 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4 和 σ_5，仿照(4)中的讨论，可以知道，从 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4 和 σ_5 这五个面中，一定可以找出两个面 σ_1 及 σ_4，它们既不是同一个面的两部分，也没有公共边界．现在撤去图 50 中两条棱 ab 及 cd，将面 σ_1、σ 和 σ_4 合成一个面 $\sigma'=\sigma_1+\sigma+\sigma_4$，得一新标准网络 S'，S' 的面数已不超过 k．由归纳法假设，S' 可用五色着色．当恢复被撤去的两条棱时，让 σ_1 和 σ_4 仍着在用五色涂网络 S' 时所用颜色，这样，σ_1，σ_2，σ_3，σ_4 和 σ_5 最多用了四色，那末至少还有一色可用于 σ，即网络 S 可用五色着色．

到这里，五色定理证明完毕．

4. 哈密顿周游世界游戏

1859 年，英国数学家哈密顿提出了这样一个问题：设正十二面体的 20 个顶点代表地球上的 20 个城市，城市之间的通道，就是正十二面体的 30 条棱，问一人从某城出发，周游全球，恰经历每城一次，最后返回原城，应如何走法？

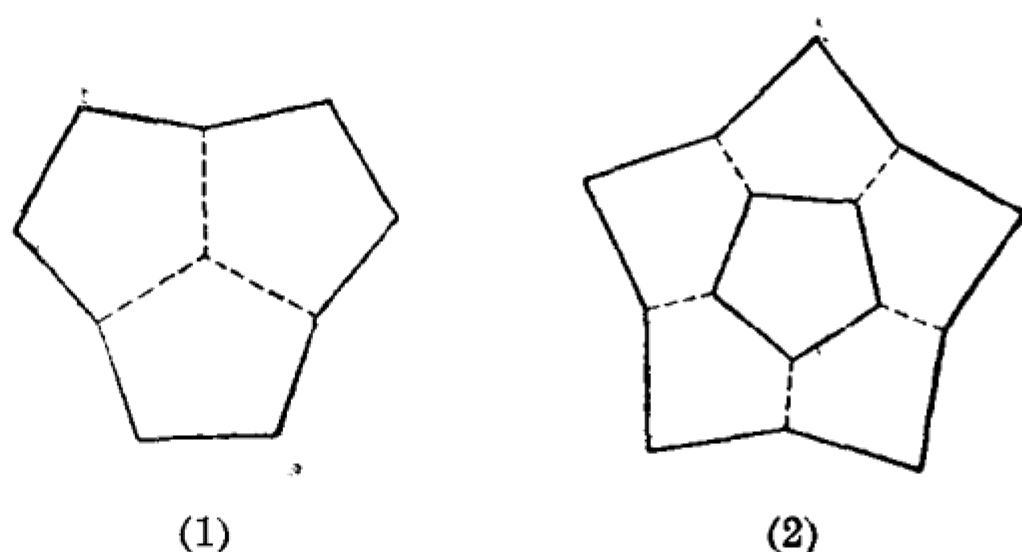
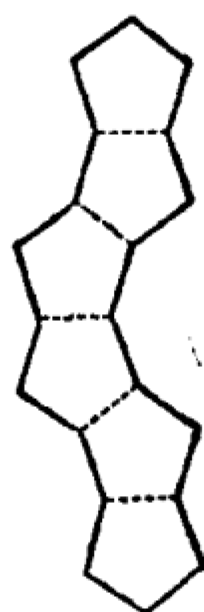


图 51

仍将正十二面体摊开成平面网络. 假如满足题设要求的路线存在的话，它必是这网络上的一条闭合折线，这条闭合折线恰好通过网络中每一个顶点一次，所以这条闭合折线是一个 20 边形的周界，这个 20 边形应由许多五边形拼成. 显然，图 51(1)、(2) 中的两种拼法不符合要求，因为在图 51(1) 中，三个五边形共一个顶点，那么这个顶点将在这些五边形拼成的多边形的内部，而不在它的周界上. 在图 51(2) 中，由这些五边形拼成的多边形象一个环，这时周界将被分开. 所以拼成 20 边形的五边形必需构成图 52 的形状，而且


图 52

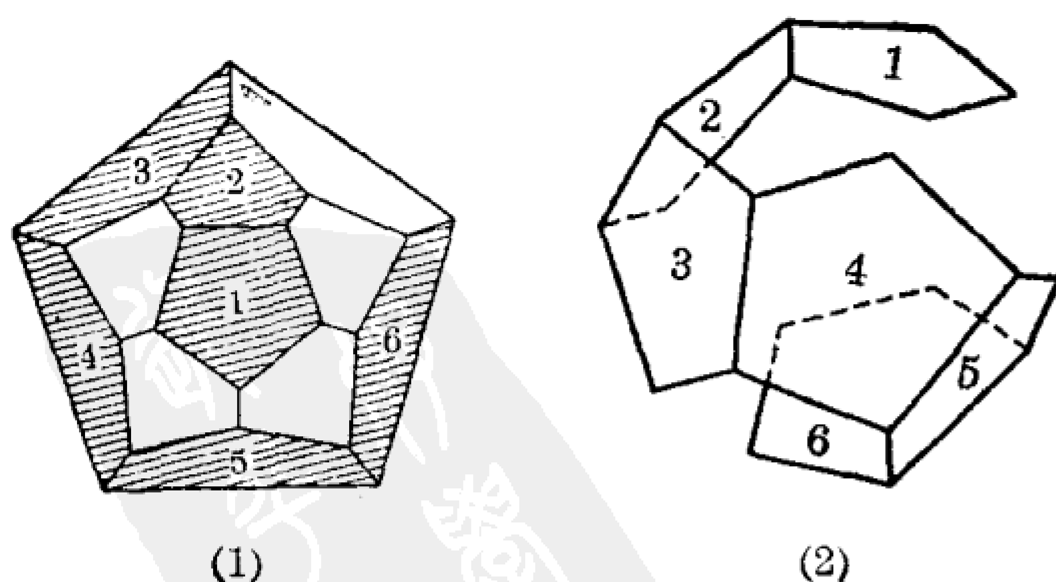


图 53

恰好只用六个五边形.

现在的问题是,在正十二面体摊成的网络中,是否能找出如图52所示的由六个五边形构成的图形. 这倒不难,在图53(1)中,标出1、2、3、4、5和6的五边形构成的阴影形就是其中的一种,它在正十二面体上的相应路线如图53(2)所示.当然,读者还可以在平面图上找出另一些符合要求的由六个五边形拼出的20边形来.



练习题解答概要

练 习 题 一

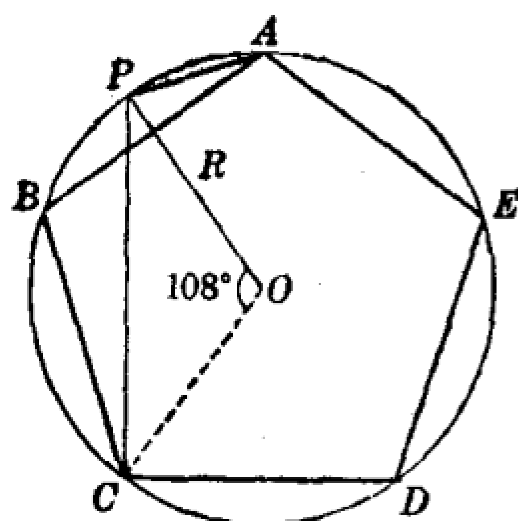
1. 如图，设 $PO=R$，那末

$$PA=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R,\ \ PA+PO=\frac{\sqrt{5}+1}{2}R.$$

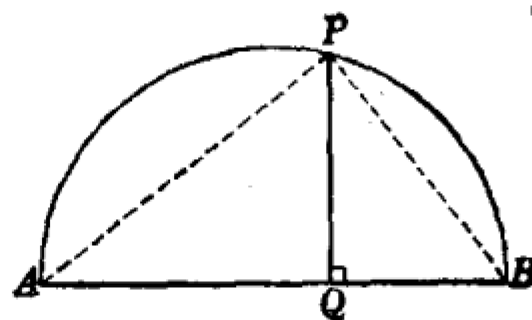
而

$$PC=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos 108^\circ}=\sqrt{2(1+\sin 18^\circ)}\ R$$
$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}\ R=\sqrt{\frac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}{4}}\ R=\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$$

所以 $$PC=PA+PO.$$



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，设 P 点已求得，由 $\triangle APB\backsim\triangle PQB$，得

$$\frac{PB}{AB}=\frac{BQ}{PB},$$

或

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{BQ}{AQ}.$$

这就是说，AQ 是内分线段 AB 成黄金分割的大段，于是 Q 点可作出，然而 P 点就容易作出了。

3. 第一个小正五边形边长与原来正五边形边长之比为

$$1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

它们的面积之比为

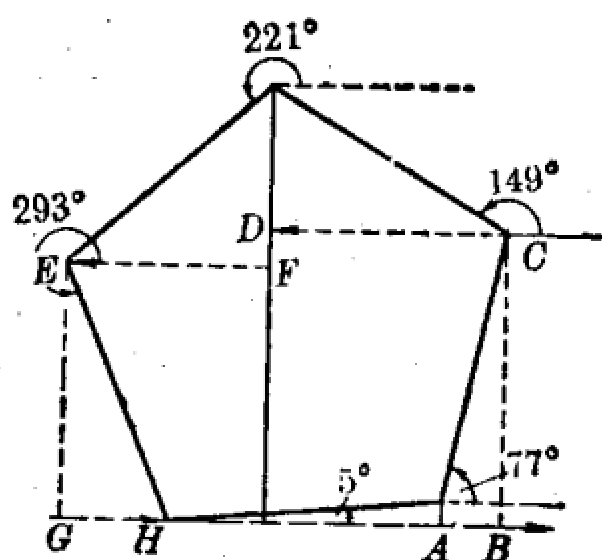
$$q=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2},$$

其余类推. 所以所有这些正五边形的面积构成一个公比为 q 的无穷递缩等比数列，它的首项为 S_0，所以这个数列的和为

$$\frac{S_0}{1-q}=\frac{3\sqrt{5}+5}{10}S_0.$$

4. 因为正五边形的每一内角为 108°，所以每一外角为 72°，于是不难得到图中各角的度数. 又，由于所作正五边形边长为 1，所以

$$\cos 5°=HA,\ \cos 77°=AB,$$
$$\cos 149°=-CD,\ \cos 221°=-EF,$$
$$\cos 293°=GH,$$



(第 4 题图)

所以

$$\cos 5°+\cos 77°+\cos 149°+\cos 221°+\cos 293°$$
$$=(HA+AB+GH)-(CD+EF)=0.$$

附注：(i) 读者如果希望利用三角恒等式解本题，可先分别对 $\cos 77°+\cos 293°$ 及 $\cos 149°+\cos 221°$ 用和差化积公式推导，然后利用诱导公式化简就可以证得.

(ii) 如果题中的 5° 角以一般角 α 代之，其他各角也作相应代换，如 77° 以 $72°+\alpha$ 代之，则等式仍成立.

5. 设矩形 R 的边长为 x 及 $y(x<y)$，下面分两种情形讨论：

(1) 如图(1)所示，设 $x<y-x$，由 $R\backsim R''$，但因边的对应情况不同，可能有两种不同的比例关系：

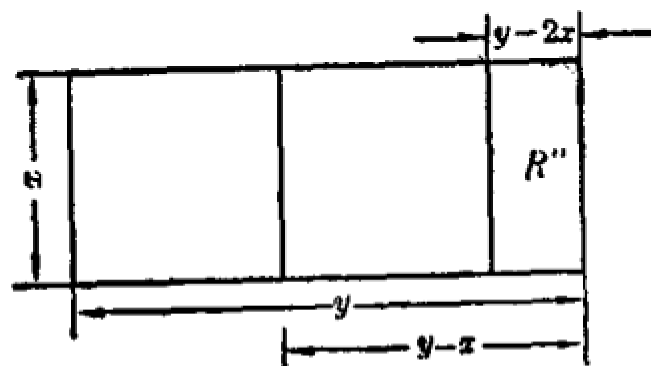
(i) $\frac{y}{x}=\frac{y-2x}{x}$,

即 $xy=xy-2x^2$，则 $x=0$，显然这种情况不会出现.

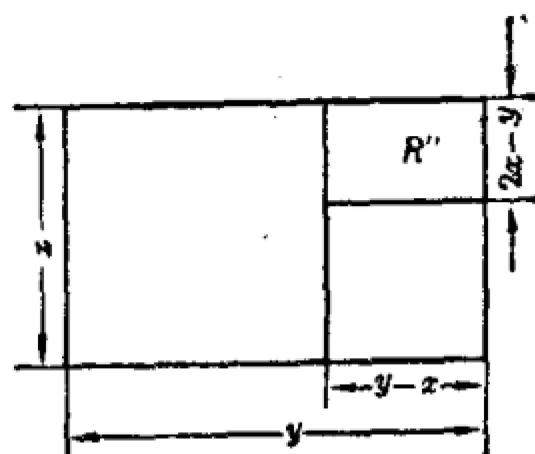
(ii) $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y-2x}$.

即 $$y^2-2xy-x^2=0,\quad \left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)-1=0,$$

所以 $$\frac{y}{x}=1\pm\sqrt{2}.\quad（舍去负根）$$



[第 5 题图(1)]



[第 5 题图(2)]

(2) 如图(2)所示，设 $x>y-x$，由 $R\backsim R''$，也有两种可能：

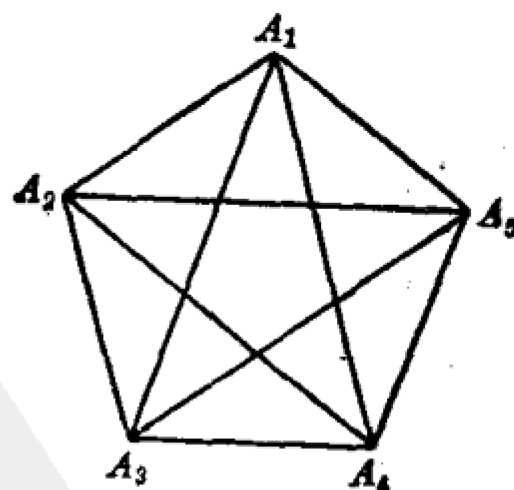
$$\frac{y}{x}=\frac{y-x}{2x-y},$$

及 $$\frac{y}{x}=\frac{2x-y}{y-x}.$$

分别解之，得 $$\frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

及 $$\frac{y}{x}=\sqrt{2}.$$

由此，求得近似黄金分割型矩形边长的比值有三种：$1+\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$ 及 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，取第三种比值时，即成为黄金分割型矩形.



（第 6 题图）

6. 设正五边形外接圆直径为 D，则正五边形的边长 $a=D\sin 36°$，正五边形对角线长 $l=D\sin 72°$，根据题意，得

$$Q=5(a^2+l^2).$$

又 $$S_1=S_{A_1A_2A_3}=S_{A_2A_3A_4}=\cdots=S_{A_5A_1A_2}$$
$$=\frac{1}{2}a^2\sin 108°=\frac{1}{2}a^2\sin 72°,$$

$$S_2=S_{A_1A_3A_4}=S_{A_2A_4A_5}=\cdots=S_{A_5A_2A_3}=\frac{1}{2}\,l^2\sin 36^\circ.$$

根据题意，$P=5(S_1^2+S_2^2)$，所以

$$\frac{Q^2}{P}=\frac{25D^4(\sin^2 72^\circ+\sin^2 36^\circ)^2}{\frac{5}{4}D^4(\sin^4 36^\circ\sin^2 72^\circ+\sin^4 72^\circ\sin^2 36^\circ)}$$

$$=\frac{20(4\sin^2 36^\circ\cos^2 36^\circ+\sin^2 36^\circ)^2}{\sin^2 36^\circ\sin^2 72^\circ(\sin^2 36^\circ+4\sin^2 36^\circ\cos^2 36^\circ)}$$

$$=\frac{20(3+2\cos 72^\circ)}{\sin^2 72^\circ}=\frac{20(3+2\sin 18^\circ)}{\cos^2 18^\circ}. \qquad (1)$$

下面只需要证明：

$$3+2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ. \qquad (2)$$

因

$$左边=\frac{(3+2\sin 18^\circ)\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{3\cos 18^\circ+\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 18^\circ+\cos 54^\circ+\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{2\cos 18^\circ+2\cos 36^\circ\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$=2(1+\cos 36^\circ)=4\cos^2 18^\circ.$$

故(2)式得证．所以

$$\frac{Q^2}{P}=80.$$

附注：(1) 如果利用

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

也可直接从(1)式算出 $\frac{Q^2}{P}=80$.

(2) 如果把题中的正五边形改成正 n 边形，那末结论为

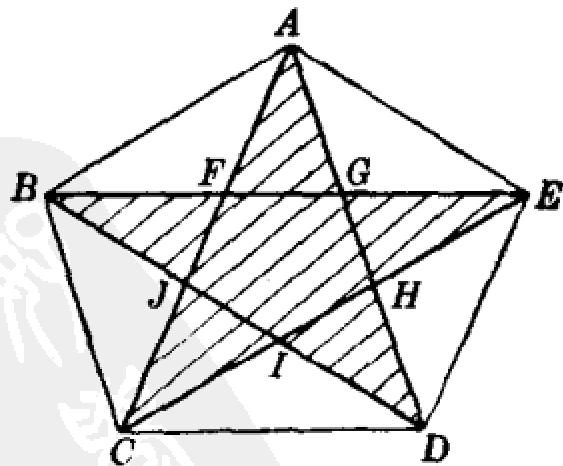
$$\frac{Q^2}{P}=16n.$$

7．(1) 如图，因 $S_{ABD}=S_{CDB}$，又这两三角形同底 ED，于是它们在 ED 边上的高相等．所以 $AC\parallel DE$．同理，

$BE\parallel CD$，$BD\parallel AE$，

$CE\parallel AB$，$BD\parallel AE$，

又



(第 7 题图)

$$S_{AEF}=S_{ABE}-S_{ABF}=S_{ABC}-S_{ABF}=S_{BCF},$$

再由 $CDEF$ 是平行四边形，得

$$S_{CEF}=S_{CDE}=S_{ABC},$$

所以 $$\frac{S_{ABF}}{S_{BCF}}=\frac{AF}{CF}=\frac{S_{AEF}}{S_{CEF}}=\frac{S_{BCF}}{S_{ABC}}=\frac{CF}{AC}$$

即证得 F 点分 AC 成黄金分割. 类似地可证得其他相交的对角线相互分成黄金分割.

(2) 求 S_{ABCDE}.

$$S_{ABCDE}=S_{BCDG}+S_{ADE}+S_{ABG}=3+S_{ABG},$$

而 $$\frac{S_{ABG}}{S_{ABE}}=\frac{BG}{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$S_{ABG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

所以 $$S_{ABCDE}=3+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\approx 3.618.$$

求 $S_{五角星ACEBD}$ 及 S_{FGHIJ}.

$$S_{ACEBD}=S_{CEF}+S_{AFG}+S_{BFJ}+S_{DHI},$$

而

$$FG=BG+EF-BE=\left(2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1\right)BE=(\sqrt{5}-2)BE,$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABE}}=\frac{FG}{BE}=\sqrt{5}-2,\quad S_{AFG}=\sqrt{5}-2.$$

同理 $$S_{BFJ}=S_{DHI}=\sqrt{5}-2.$$

所以 $$S_{ACEBD}=1+3(\sqrt{5}-2)=3\sqrt{5}-5.$$

$$S_{FGHIJ}=S_{ACEBD}-5S_{AFG}=5-2\sqrt{5}.$$

(3) 由(1)中的分析，可得如下作法：

1. 任作 $\triangle ABE$，使 $S_{ABE}=1$ (如图).

2. 作点 F, G 分线段 BE 成中外比，即

$$\frac{EF}{BE}=\frac{BF}{EF}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \frac{BG}{BE}=\frac{GE}{BG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

3. 过 B 作 $BD\parallel AE$ 交 AG 的延长线于 D.

4. 过 E 作 $EC /\!/ AB$ 交 AF 的延长线于 C.

则 $ABCDE$ 为所求凸五边形. 由作法步骤 1 可见, 满足要求的凸五边形不是唯一的.

证明 因为 $AE /\!/ BD$, 那末 $\triangle AGE \backsim \triangle BGD$, 所以

$$\frac{AG}{GD}=\frac{GE}{BG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

于是
$$\frac{S_{AGE}}{S_{GED}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

而
$$\frac{S_{AGE}}{S_{ABG}}=\frac{GE}{BG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

所以
$$S_{GED}=S_{ABG},$$

所以
$$S_{AED}=S_{AGE}+S_{GED}=S_{AGE}+S_{ABG}=S_{ABE}=1.$$

同理
$$S_{ABC}=1.$$

从作图可知 $BF \doteq GE$, 于是

$$S_{ABF}=S_{AGE}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad S_{BCF}=S_{GED},$$

所以 $BE /\!/ CD$. 由此可知

$$S_{BCD}=S_{CDE}.$$

又
$$\frac{FG}{CD}=\frac{AF}{AC}=\frac{S_{ABF}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABF}}{S_{ABE}}=\frac{BF}{BE}=\frac{FG}{EF},$$

所以
$$CD=EF.$$

故知 $CDEF$ 是一平行四边形, 于是 $S_{CDE}=S_{CEF}$.

而
$$\frac{S_{ABF}}{S_{CEF}}=\left(\frac{BF}{EF}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

所以
$$S_{CEF}=1,\ S_{CDE}=1.$$

8. (1) 设四点为 A、B、C、D, 它们的两两距离共有六个: AB、AC、AD、BC、BD 及 CD. 于是取值 a 和 b 有四种可能:

(i) 六条都为 a;

(ii) 五条为 a, 一条为 b;

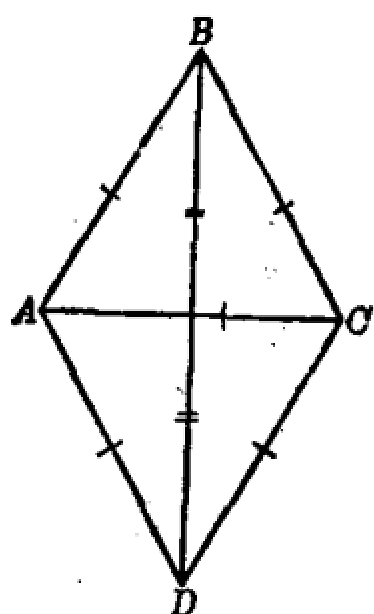
(iii) 四条为 a, 两条为 b;

(iv) 三条为 a, 三条为 b;

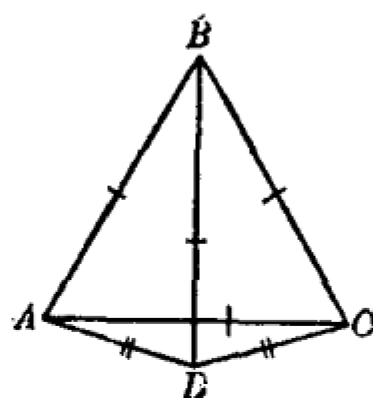
六条都为 b 的情况，将类似于(i)，其余类推. 下面对上述四种情况分别加以讨论:

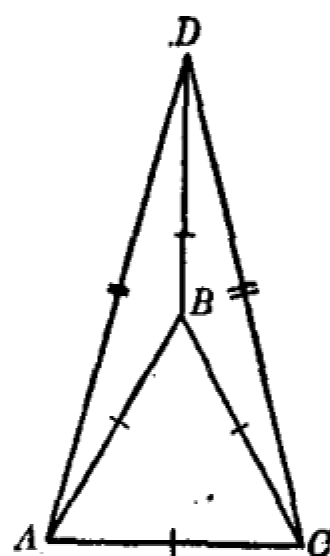
（i）不可能. 因为 ABC、BCD 都成为等边三角形,所以 AD 不可能等于 a.

（ii）这时必有三点,如 ABC 为等边三角形,设 $AD=CD=a$, $BD=b$, 所以 $ABCD$ 为一菱形，见图(1)，且此时 $b=\sqrt{3}a$.



[第 8 题图(1)]



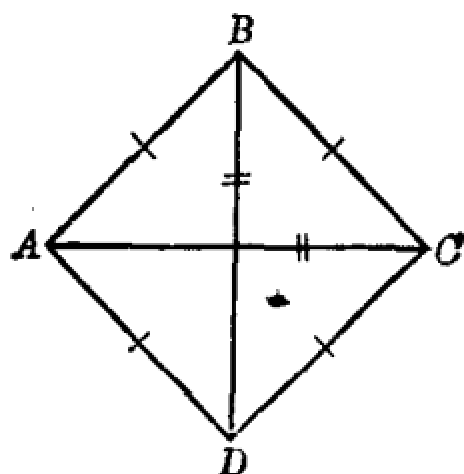


[第 8 题图(2)]

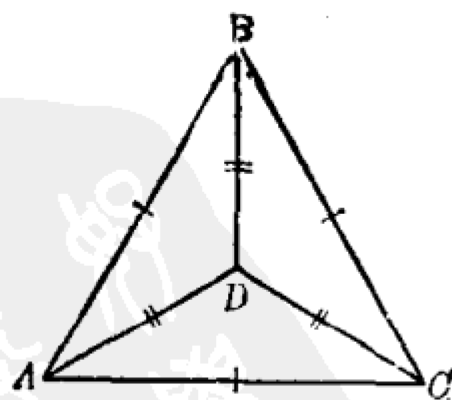
(iii) 分两种情形:

1. 两条等于 b 的线段有公共顶点，例如 D. 则 ABC 成为以 a 为边的等边三角形. D 距此三角形两顶点 A、C 为 b, 距 B 为 a, 于是 D 是 AC 中垂线上距 B 为 a 的点，此时看 B、D 是否在 AC 的同侧，又分两种情况，见图(2)，由余弦定理易得 $b=a\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$.

2. 两条等于 b 的线段，不共顶点. 例如 $AC=BD=b$, 又因 $AB=BC=CD=DA=a$, 所以 $ABCD$ 成一正方形，且 $b=\sqrt{2}a$, 见图(3).



[第 8 题图(3)]



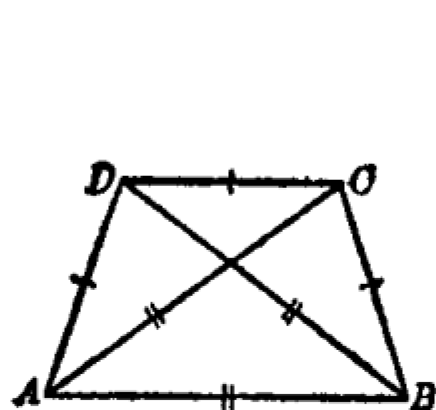
[第 8 题图(4)]

(iv) 分两种情形:

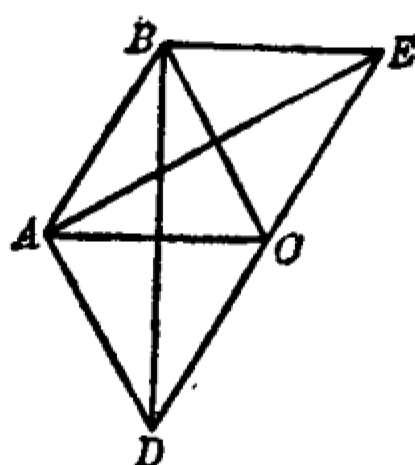
1. 四点中有三点,例如 ABC 构成等边三角形,此时 D 必为 $\triangle ABC$ 的中心,且 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,见图(4).

2. 四点中不存在三点可构成等边三角形,设 $b>a$,则在此三条长为 b 的线段中可找出两条有公共顶点,例如 A,且 $AB=AC=b$,又设 $BC=a$.

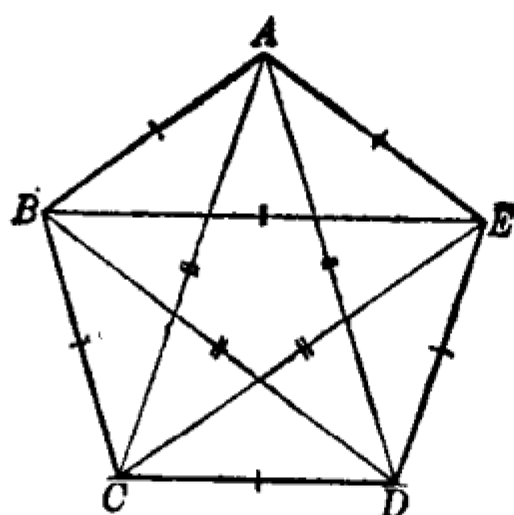
现在证明,D 不得与 B、C 等距. 若 $BD=CD=a$,则 $\triangle BCD$ 为等边三角形,与原假设矛盾;若 $BD=CD=b$,于是就有四条长为 b 的线段,与原假设矛盾. 于是 D 在 BC 的中垂线外,设与 C 同侧,所以 $DB>DC$,因此 $DB=b$,$DC=a$,见图(5).



[第8题图(5)]



[第8题图(6)]



[第8题图(7)]

易见 $AB\parallel DC$,故 $ABCD$ 为等腰梯形,且 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

总之,A、B、C、D 四点只有图(1)～(5)中的六种情形. 且每种情形,a、b 有不同的比例关系.

(2) 设 A、B、C、D、E 为题设五点,则任取四点(例如 A、B、C 及 D)满足(1)的条件,所以这四点的位置只有图(1)～(5)中的六种情况.

若 A、B、C 及 D 有图(1)的情形,则 $b=\sqrt{3}a$,所以 A、B、C 及 E 也只能有图(1)的情形. 今 $E\neq D$,所以 A、B、C、D 和 E 有如图(6)的情形,但此时 $DE=2a$,不行.

类似分析图(2)～(4)的情况不行.

因此 A、B、C、D 只能构成图(5)的等腰梯形,同时 A、B、C 及 E 也应为等腰梯形,所以 $ABCDE$ 为正五边形,见图(7).

练 习 题 二

1. 显然，蜜蜂爬到 0 号房有 $F_2=1$ 条路线，爬到 1 号房有 $F_3=2$ 条路线，……，一般地，可以归纳得出蜜蜂爬到 n 号房有 F_{n+2} 条路线. 事实上，蜜蜂爬到 n 号房的路线有两类：一类是不经 $n-1$ 号房的路线，由 $n-2$ 号房向 n 号房爬，这种路线数即是从未标号房爬到 $n-2$ 号房的路线数，由归纳法假设为 F_n；一类是经过 $n-1$ 号房的路线数，即爬到 $n-1$ 号房后，再向 n 号房爬，与前同理，这类路线数为 F_{n+1}. 所以蜜蜂从未标号房开始，爬到 n 号房的路线数应为

$$F_n+F_{n+1}=F_{n+2}.$$

2. 因为 $a+b=1$, $ab=-1$, 所以

$$u_1=\frac{a-b}{a-b}=1,$$

$$u_2=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b=1.$$

而当 $n\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{a^n-b^n}{a-b}=\frac{a^{n-1}a-b^{n-1}b}{a-b}=\frac{a^{n-1}(1-b)-b^{n-1}(1-a)}{a-b}\\&=\frac{a^{n-1}-b^{n-1}-aba^{n-2}+abb^{n-2}}{a-b}=\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\\&\quad+\frac{a^{n-2}-b^{n-2}}{a-b}=u_{n-1}+u_{n-2}.\end{aligned}$$

所以 u_n 就是 F-数列.

由韦达定理 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$、$b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，可得 u_n 的通项公式

$$u_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

3. 设 n 被 m 整除，即 $n=m_1m$，下面对 m_1 行归纳法.

当 $m_1=1$ 时，$n=m$，所以 F_n 被 F_m 整除.

假设当 $m_1=k$ 时，$F_n=F_{km}$ 被 F_m 整除，那末当 $m_1=k+1$ 时，由性质 5

$$F_{(k+1)m}=F_{km+m}=F_{km-1}F_m+F_{km}F_{m+1},$$

所以 $F_{(k+1)m}$ 被 F_m 整除，即证得结论成立.

4. 设 r_k 表示用 m 除 F_k 后所得的余数，取前 m^2+2 个 F-数，作余数对序列

$$(r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, r_4), \cdots, (r_{m^2}, r_{m^2+1}), (r_{m^2+1}, r_{m^2+2}). \quad (1)$$

规定当 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ 时，$(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$，于是用 m 除后所得的余数做成的数对，只有 m^2 个不相等的. 而数对序列(1)中有 m^2+1 个，所以其中至少有两对相等. 在(1)中取出相等的两对

$$(r_k, r_{k+1})=(r_l, r_{l+1}), \quad k<l$$

而且可以设 k 是所有可能相等对中下标最小的. 下面证明 $k=1$. 采用反证法，假如 $k>1$，那末由 $F_{k-1}=F_{k+1}-F_k$，$F_{l-1}=F_{l+1}-F_l$ 及 $r_k=r_l$, $r_{k+1}=r_{l+1}$，得 $r_{k-1}=r_{l-1}$. 所以$(r_{k-1}, r_k)=(r_{l-1}, r_l)$,这与 k 的取法相矛盾.

由此可知$(r_1, r_2)=(1, 1)$ 必在 (1) 中出现两次，设 $(r_t, r_{t+1})=(1, 1)$，$0<t\leqslant m^2+1$，这就说明 F_t 及 F_{t+1} 用 m 除后有相同的余数. 所以其差

$$F_{t-1}=F_{t+1}-F_t$$

被 m 整除. 而 $1\leqslant t-1\leqslant m^2$，即证得前 m^2 个 F-数中至少有一个能被 m 整除.

取一个被 m 整除的 F-数 F_n，那末由第3题结论可知 F_n、F_{2n}、F_{3n}、…、F_{kn}、… 被 m 整除. 也就是说,有无穷多个 F-数被 m 整除.

5. 令

$$u_{n+1}=C_n^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

于是当 n 为偶数,即 $n=2m$ 时,有

$$\left[\frac{n}{2}\right]=m, \quad \left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[m-\frac{1}{2}\right]=\left[(m-1)+\frac{1}{2}\right]=m-1,$$

$$n-1-\left[\frac{n-1}{2}\right]=n-m=m,$$

所以

$$u_{n+1}=C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_m^m,$$

$$u_n=C_{n-1}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_{n-1-\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$
$$=C_{n-1}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_m^{m-1}.$$

两式相加,并利用公式 $C_k^i+C_k^{i+1}=C_{k+1}^{i+1}$ 及 $C_n^0=C_{n+1}^0=1$, 得

$$u_n+u_{n+1}=C_n^0+(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)+(C_{n-2}^1+C_{n-2}^2)+\cdots+(C_m^{m-1}+C_m^m)$$
$$=C_{n+1}^0+C_n^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{m+1}^m$$
$$=C_{n+1}^0+C_n'+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}=u_{n+2}.$$

当 n 为奇数时,类似地可证得 $u_n+u_{n+1}=u_{n+2}$, 又前两项的值

$$u_1=C_0^0=1,\ u_2=C_1^0=1,$$

所以数列 $u_{n+1}(n=0, 1, 2, \cdots)$就是 F-数列 $F_n(n=1, 2, \cdots)$.

6. 因 a_n 是 F_n 的末位数,而 $F_1=1$, $F_2=1$,所以 $a_1=1$, $a_2=1$.又因 $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}(n=1, 2, \cdots)$, 所以 F_{n+2} 的末位数就是 F_n 的末位数与 F_{n+1} 的末位数的和的末位数. 由此可知 $a_{n+2}(n=1, 2, \cdots)$ 就是 a_n+a_{n+1} 的末位数. 又因为奇数加奇数等于偶数, 偶数加奇数等于奇数,所以无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 必有如下排列规律

0.奇奇偶 奇奇偶 奇奇偶……,

而由1、3、5、7、9五个数字组成的奇数对只有 $5\times5=25$ 种, 因此在构成上面小数的前26组“奇奇偶”中的奇数对中, 必有完全相同的(例如11第二次出现了). 所以这个小数必从最先出现的相同的奇数对开始循环. 而且从上面讨论可见, 这个小数最迟在第 $3\times25=75$ 位后循环. 下面将这个小数写出:

0.112358314594370774156178538190

998752796516730336954932572910 11…

可见它以前60位为第一个循环节.

练 习 题 三

1. 设有格点正 $\triangle ABC$(如图), 不妨设A是坐标原点. 我们先证明任何格点三角形的面积为整数之半. 如图,矩形 $ADEF$ 的边长为整数, 所以 S_{ADEF} 为整数. 又直角 $\triangle ABD$ 的直角边为整数, 所以 S_{ABD} 等于

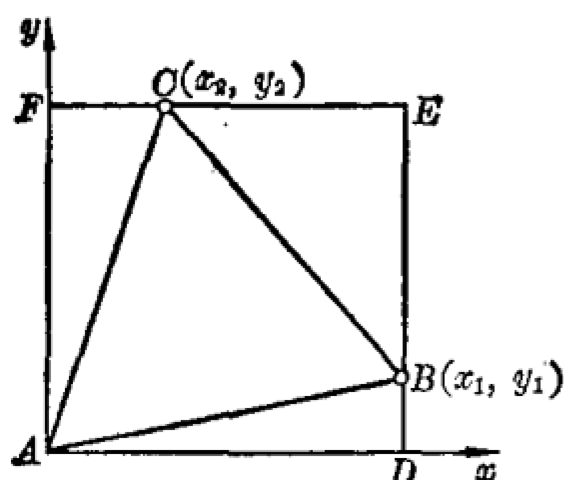
整数之半．同理 S_{BCE}、S_{ACF} 等于整数之半，而

$$S_{ABC}=S_{ADEF}-S_{ABD}-S_{BCE}-S_{ACF},$$

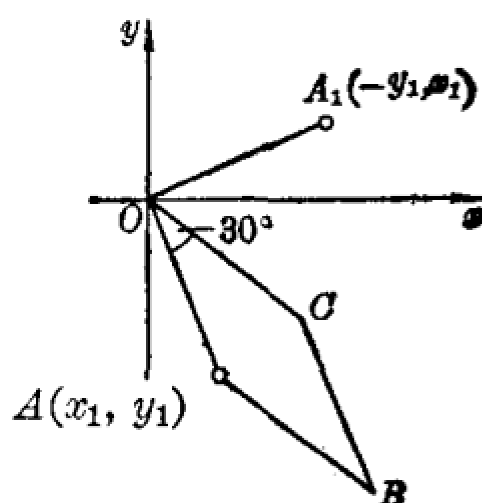
所以 S_{ABC} 为整数之半．另一方面

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,AB\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{4}\,AB^2$$

为一无理数，与假设矛盾，所以不存在格点正三角形．



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2．设有一非正方形的格点菱形 $OABC$，取 O 为坐标原点（如图）．因菱形面积等于两个全等三角形的面积之和，由上题格点三角形面积等于整数之半，所以格点菱形面积应为整数．另一方面，设菱形边长为 a，其锐角为 θ，则菱形面积为 $a^2\sin\theta$，所以 $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 应为有理数，又由 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 可知，$0<\frac{\pi}{2}-\theta<\frac{\pi}{2}$，所以有下面两种情况：

(1) $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3}$，故 $\theta=\frac{\pi}{6}$．

如图，设 A 点的坐标为 (x_1, y_1)，x_1, y_1 均为整数．取格点 $A_1(-y_1, x_1)$，并连结 OA_1，易见 $OA\perp OA_1$ 且 $OA=OA_1$，于是 $\triangle A_1OC$ 为一格点正三角形，这是不可能的．也就是说，这种情况不会出现．

(2) $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数，所以 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数．

3．因各边长为整数，于是由余弦定理，$\cos\theta$ 为有理数，又 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以或者 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数，或者 $\theta=\frac{\pi}{3}$．但 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，直角三

角形三边之比应为$2:\sqrt{3}:1$，这样三边之长与已知条件矛盾．所以$\frac{\theta}{\pi}$为无理数．

4．因三边长都是整数，于是$\cos\theta$为有理数．设$\frac{\theta}{\pi}$为有理数，下面分几种情况讨论：

(1) 若$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，则$\theta=\frac{\pi}{3}$.

(2) 若$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$是有理数．

(3) 若$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，故 $0<\pi-\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$为有理数，因设$\frac{\theta}{\pi}$为有理数，故$\frac{\pi-\theta}{\pi}$是有理数，所以$\pi-\theta=\frac{\pi}{3}$，$\theta=\frac{2}{3}\pi$.

这就证得或者$\frac{\theta}{\pi}$为无理数，或者θ等于$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$及$\frac{2\pi}{3}$.

附注：上式θ等于$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$及$\frac{2\pi}{3}$三种情况都是可能出现的．例如，对边长为3、4、5的三角形，有一个角等于$\frac{\pi}{2}$；边长为1、1、1的三角形，三个角都等于$\frac{\pi}{3}$；对边长为3、5、7的三角形，设最大边的对角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2},\quad \theta=\frac{2}{3}\pi.$$

5．用反证法证明．设$\frac{\theta}{\pi}$为有理数，令$\frac{\theta}{\pi}=\frac{m}{n}$（设为既约分数），$\theta=\frac{m}{n}\pi$．因$\theta=\arccos\frac{1}{p}$，故$\cos\theta=\frac{1}{p}$，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{p^2-1}}{p},$$

又$\sin n\theta=\sin m\pi=0$，将各值代入公式

$$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots$$

得
$$0=\frac{\sqrt{p^2-1}}{p^n}[C_n^1-C_n^3(p^2-1)+C_n^5(p^2-1)^2-\cdots].$$

因为$p>1$，$\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\neq0$，所以

$$C_n^1-C_n^3(p^2-1)+C_n^5(p^2-1)^2-\cdots=0.$$

又，p 为奇数，故 p^2-1 为偶数，所以上式左边各项除第一项外都是偶数，由是第一项 $C_n^1=n$ 也是偶数，令 $n=2k$，由 $\frac{m}{n}$ 的既约性知 m 为奇数．所以

$$\cos k\theta=\cos k\frac{m\pi}{n}=\cos\frac{m\pi}{2}=0.$$

再将各值代入公式

$$\cos k\theta=\cos^k\theta-C_k^2\cos^{k-2}\theta\sin^2\theta+C_k^4\cos^{k-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$$

得
$$0=\frac{1}{p^k}[1-C_k^2(p^2-1)+C_k^4(p^2-1)^2-\cdots],$$

$$1-C_k^2(p^2-1)+C_k^4(p^2-1)^2-\cdots=0.$$

此式中第一项为奇数，其他各项都是偶数，不可能成立，与假设矛盾，所以 $\frac{\theta}{\pi}$ 为无理数．